# INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXI. BAND ERSTES HEFT 1953

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

*Preis DM 11,60*

Das

# INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. E. Mettler, Clausthal-Zellerfeld, Poststr. 2
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

**Vertriebsvertretung im Ausland:**
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

## Inhalt:

Seite

*Jacobs, W.* u. *E. Truckenbrodt*, Der induzierte Seitenwind von Flugzeugen. Mit 27 Textabbildungen ..... 1

*Jacobs, W.*, Ein vereinfachtes Verfahren zur Berechnung des induzierten Seitenwindes von Flugzeugen. Mit 14 Textabbildungen ..... 23

*Schmutz, O.*, Koeffizientenbedingungen zur Kontrolle des Dämpfungsgrades bei Ausgleichvorgängen (verallgemeinerte Hurwitzbedingungen). Mit 6 Textabbildungen ..... 33

*Becker, E.*, Analogie zwischen Wasserschwall und Verdichtungsstoß. Mit 12 Textabbildungen ..... 42

*Matthieu, P.*, Über die Berechnung der Hypoidgetriebe. (I. Mitteilung.) Mit 7 Textabbildungen ..... 55

*Müller, W.*, Die Momentenfläche der elastischen Platte oder Pilzdecke und die Bestimmung der Durchbiegung aus den Momenten. Mit 8 Textabbildungen ..... 63

INGENIEUR-ARCHIV

XXI. BAND ERSTES HEFT 1953

# Der induzierte Seitenwind von Flugzeugen.*

Von W. Jacobs und E. Truckenbrodt.

**1. Einleitung.** In dem Bestreben, die Flugeigenschaften eines Flugzeuges rechnerisch zu beherrschen, ist man schon seit längerer Zeit bemüht, die hierfür erforderlichen aerodynamischen Beiwerte, die sog. Stabilitätsbeiwerte, nicht nur aus Windkanalmessungen zu beschaffen, sondern möglichst auch theoretisch zu ermitteln [1 2]. Hierbei spielt die gegenseitige Beeinflussung der Flugzeugteile, die sog. Interferenz, eine ausschlaggebende Rolle [3 4 5 14 15]. Für die Stabilität um die Querachse (Längsstabilität) liegt eine besonders starke Interferenz zwischen Flügel, Rumpf und Höhenleitwerk vor, die vom Flügelabwind herrührt. Durch diesen Abwind wird in bekannter Weise der Beitrag des Höhenleitwerks zum Moment um die Querachse stark abgemindert. Dieses Problem ist theoretisch und experimentell weitgehend untersucht worden [6 7 8 9]. Neuerdings ist nun eine ganz ähnliche Beeinflussung des Seitenleitwerks und seines Beitrages zur Richtungsstabilität durch den Flügel und Rumpf aufgedeckt worden [3 10]. Je nach der Lage des Flügels relativ zum Rumpf (Tief-, Mittel-, Hochdecker) wird beim Schieben des Flugzeuges am Ort des Seitenleitwerks ein induzierter Seitenwind erzeugt, der den Beitrag des Seitenleitwerks zum Giermoment und damit zur Richtungsstabilität vergrößert bzw. verringert. Eine physikalische Deutung dieses Einflusses wird im folgenden Abschnitt **2** gegeben. Im Abschnitt **3** wird erstmalig versucht, diese recht verwickelten Strömungsvorgänge in stark vereinfachter Form einer rechnerischen Behandlung zugänglich zu machen. Experimentelle Untersuchungen zu diesem Problemkreis liegen bereits vor [11 12 13]. Im Abschnitt **4** wird dann über umfangreiche Windkanalmessungen an verschiedenen Flügel-Rumpf-Anordnungen beim Schieben berichtet. Die Messungen werden mit den theoretischen Rechnungen verglichen.

**2. Physikalische Grundlagen.** Eine qualitative Erklärung des induzierten Seitenwindes wurde erstmalig von *H. Multhopp* [3] und gleichzeitig auch von *H. Schlichting* und *W. Frenz* [10] angegeben. Die vom Schieben herrührende Querumströmung des Rumpfes erzeugt am Flügel eine antimetrische Auftriebsverteilung, welche auch die Ursache für das durch den Rumpf stark beeinflußte Schieberollmoment ist. Entscheidend für das Vorzeichen dieser zusätzlichen Auftriebs-

---

* Die vorliegende Untersuchung wurde in den Jahren 1942 bis 1944 am damaligen Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Braunschweig (Leitung: Prof. Dr. *H. Schlichting*) ausgeführt. Sie ist unter dem Titel „Theoretische und experimentelle Untersuchungen über den induzierten Seitenwind von Flugzeugen" im Jahre 1944 von der Fakultät Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig als Habilitationsschrift des erstgenannten Verfassers angenommen worden. (Referent Prof. Dr. *H. Schlichting*, Korreferent Prof. Dr. *H. Blenk*.) Die hier vorliegende gekürzte Fassung wurde vom zweitgenannten Verfasser angefertigt. Von ihm stammt auch die vereinfachte Neufassung des theoretischen Teiles (Abschnitt 3).

[1] *G. Mathias*, Die Seitenstabilität des ungesteuerten Normalfluges und ihre technischen Vorbedingungen. DVL-Jahrb. 1932, S. VIII 17.

[2] *C. H. Zimmermann*, An analysis of lateral stability in power-off flight with charts for use in design, NACA Rep. No. 589, 1937.

[3] *H. Multhopp*, Luftfahrt-Forsch. 18 (1941), S. 51.

[4] *F. Riegels* und *W. Liess*, Jahrbuch 1942 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I 366.

[5] *H. Schlichting*, Jahrbuch 1940 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I 113.

[6] *I. Flügge-Lotz* und *D. Küchemann*, Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I 172.

[7] *H. Multhopp*, Luftfahrt-Forsch. 15 (1938), S. 463.

[8] *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 233.

[9] *H. Trienes* und *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 26.

[10] *H. Schlichting* und *W. Frenz*, Jahrbuch 1941 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I 300.

[11] *R. O. House* und *A. R. Wallace*, Wind-tunnel investigation of the effect of interference on lateral stability-characteristics of four NACA 23012 wings, an elliptical und a circular fuselage, and vertical fins, NACA Rep. No. 705, 1941.

[12] *M. J. Bamber* und *R. O. House*, Wind-tunnel investigation of effect of yaw on lateral stability characteristics, NACA Tech. Note No. 703 und No. 730, 1939.

[13] *H. Schlichting* und *W. Frenz*, Jahrbuch 1943 der Deutschen Luftfahrtforschung. Vorabdruck in Techn. Berichte, Bd. 11 (1944), H. 6.

[14] *W. Jacobs*, Lift and moment changes due to the fuselage for a yawed aeroplane with unswept and swept wings. Flygtekniska Försöksanstalten, Stockholm, Medd. 34, 1950.

[15] *W. Jacobs*, Untersuchungen über die Interferenz zwischen Seitenleitwerk und Deltaflügel beim Schieben. Flygtekniska Försöksanstalten, Stockholm, Institutsbericht, 1953.

verteilung ist die relative Lage des Flügels zum Rumpf. Ist z. B. der Flügel in einer Schulterdecker-Anordnung mit dem Rumpf verbunden, so gibt es am schiebenden Flügel an der vorgehenden Flügelhälfte zusätzliche Aufwärtsgeschwindigkeiten und an der zurückliegenden Flügelhälfte entsprechende Abwärtsgeschwindigkeiten (Abb.1). Bei einer Tiefdecker-Anordnung liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt. Praktisch beschränkt sich die durch den Rumpf hervorgerufene Auftriebsänderung auf einen kleinen Bereich in Rumpfnähe. Sie erreicht dort allerdings ziemlich starke Spitzen, so daß in diesem Gebiet am Flügel ein starker Druckgradient in Spannweitenrichtung entsteht, der am Flügel große induzierte Seitengeschwindigkeiten erzeugt. Da die am Flügel herrschenden induzierten Seitenwinde sich naturgemäß hinter dem Flügel fortsetzen, treffen sie auf das Seitenleitwerk. Gemäß ihrer Entstehung sind diese induzierten Seitengeschwindigkeiten proportional dem Schiebewinkel $\beta$ und unabhängig vom Anstellwinkel $\alpha$. Unterhalb und oberhalb der von der Flügelhinterkante abgehenden Wirbelfläche haben sie verschiedenes Vorzeichen. Je nach der Lage der Wirbelschicht zum Seitenleitwerk wird also der Einfluß mehr oder weniger stark sein. Nimmt man an, daß das Seitenleitwerk oberhalb der Wirbelfläche liegt, so ergibt die induzierte Seitenströmung beim Tiefdecker eine Erhöhung der Richtungsstabilität durch das Seitenleitwerk und beim Schulterdecker eine Verminderung.

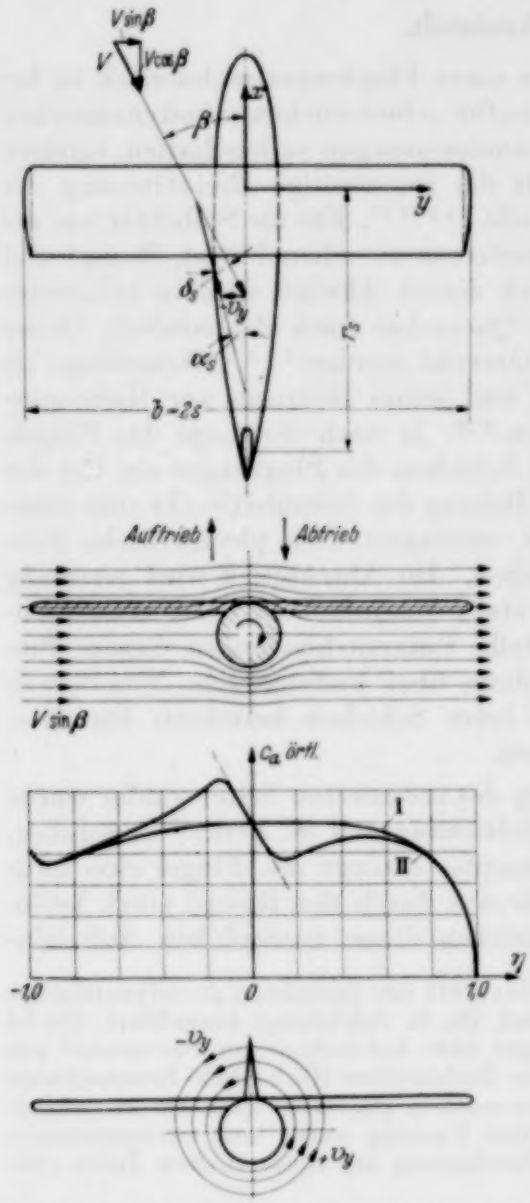



Abb. 1. Erläuterungsskizze zur Entstehung der induzierten Seitengeschwindigkeit.
I. Flügel allein; II. Flügel mit Rumpf.

Durch die Anstellung des Rumpfes werden außer den eben behandelten antimetrischen Verteilungen noch symmetrische Auftriebsänderungen längs Spannweite erzeugt, mit denen wir uns aber nur insofern befassen wollen, als sie zur Bestimmung der Lage der Wirbelschicht von Bedeutung sind.

Die bei einem ungepfeilten Flügel allein (mit und ohne V-Form) infolge Schiebens entstehende Auftriebsverteilung längs Spannweite (Abb.2) weist gegenüber dem Rumpfeinfluß nur sehr geringe antimetrische Beträge auf und trägt infolgedessen zum induzierten Seitenwind nichts Wesentliches bei.

Ist der induzierte Seitenwind $v_y$ bekannt, so berechnet sich der Anströmungswinkel des Seitenleitwerkes nach Abb.1 zu

$$\alpha_S = \beta - \delta_S\,, \tag{1}$$

wobei $\beta$ der Schiebewinkel und

$$\delta_S = -\frac{v_y}{V} \tag{2}$$

der induzierte Seitenwindwinkel ist. Aus (1) und (2) folgt sofort

$$\frac{\partial \alpha_S}{\partial \beta} = 1 - \frac{\partial \delta_S}{\partial \beta} = 1 + \frac{1}{V}\frac{\partial v_y}{\partial \beta}\,. \tag{3}$$

Für das Giermoment des ganzen Flugzeuges gilt

$$c_N = c_{N0} - \frac{r_S F_S q_S}{s F q}\, c_{a_S}\,. \tag{4}$$

Hierin ist $c_N = N/qFs$ der Giermomentenbeiwert des ganzen Flugzeuges, und $c_{N0}$ stellt den Anteil des Flugzeuges ohne Seitenleitwerk dar; $r_S$ ist der Abstand des Seitenleitwerks von der Momentenbezugsachse, $F_S$ die Seitenleitwerksfläche, $q_S$ der Staudruck am Ort des Seitenleitwerkes und $c_{aS}$ der auf die Seitenleitwerksfläche bezogene Auftriebsbeiwert; $s = b/2$ ist die halbe Flügelspannweite, $F$ die Flügelfläche und $q$ der Anströmungsstaudruck (vgl. Abb. 1).

Für den Beiwert der Richtungsstabilität folgt aus (4):

$$\frac{\partial c_N}{\partial \beta} = \frac{\partial c_{N0}}{\partial \beta} - \frac{r_S F_S}{s F}\left(\frac{dc_a}{dx}\right)_S \zeta_S\,, \tag{5}$$

wobei

$$\zeta_S = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{q_S}{q}\alpha_S\right) \approx 1 - \frac{\partial \delta_S}{\partial \beta} = 1 + \frac{1}{V}\frac{\partial v_y}{\partial \beta} \,. \tag{6}$$

ein dem Wirkungsfaktor des Höhenleitwerkes entsprechend gebildeter Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes ist[1]. Wir nehmen dabei näherungsweise an, daß keine Abschirmung des Seitenleitwerkes erfolgt; setzen also $q_S/q \approx 1$.

Aus dem bereits Gesagten können wir bei der üblichen Lage des Seitenleitwerkes für den Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes folgendes aussagen:

Tiefdecker: $\zeta_S > 1$ (stabilisierend),
Schulterdecker: $\zeta_S < 1$ (instabilisierend),
Mitteldecker: $\zeta_S = 1$ (neutral).

Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist es nun, die Wirkungsfaktoren einmal theoretisch zu berechnen und zum anderen experimentell zu bestimmen.

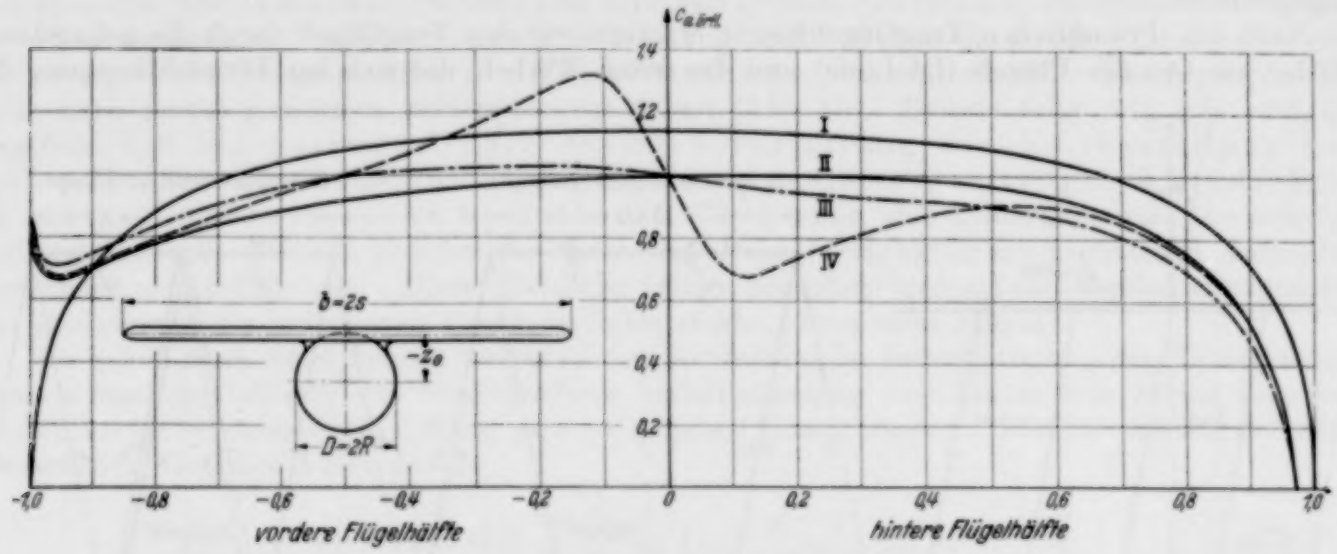



Abb. 2. Auftriebsverteilung eines schiebenden Flugzeuges. Rechteckflügel: $A = 5$, $c'_{a_\infty} = 2\pi$, $\bar{c}_a = 1{,}0$.
I. Flügel allein, $\beta = 0°$. II. Flügel allein, $\beta = 20°$. III. Flügel allein mit 3° V-Stellung, $\beta = 20°$.
IV. Flügel + Rumpf (Schulterdecker), $\beta = 20°$.

**3. Die theoretische Berechnung des Wirkungsfaktors.** a) Die Formel zur Berechnung des örtlichen Wirkungsfaktors. Ein theoretischer Ansatz zur Abschätzung des Wirkungsfaktors des Leitwerkes ist bereits in der zitierten Arbeit von *H. Schlichting* und *W. Frenz*[2] enthalten. Beschränkt man sich auf Punkte, die sich unmittelbar ober- oder unterhalb der Wirbelschicht befinden, so findet man für die induzierte Seitengeschwindigkeit in bekannter Weise

$$v_y = \pm \frac{1}{2}\frac{d\Gamma}{dy} \,. \tag{7}$$

Hierin bedeutet $\Gamma(y)$ die Zirkulationsverteilung längs Spannweite. Das obere positive Vorzeichen gilt für Punkte oberhalb der Wirbelschicht, das untere negative Vorzeichen entsprechend für Punkte unterhalb der Wirbelschicht. Für die Berechnung des induzierten Seitenwindes am Ort des Seitenleitwerkes kommt es also auf den Gradienten der Zirkulationsverteilung $d\Gamma/dy$ in der Umgebung der Flügelmitte an. Wie wir aus Abb. 2 ersehen, gibt besonders der Rumpf den überwiegenden Beitrag zum Gradienten $d\Gamma/dy$ und damit zum induzierten Seitenwind.

Für die Zirkulation führen wir den dimensionslosen Wert

$$\gamma = \frac{\Gamma}{bV} \tag{8}$$

ein. Die Zirkulation können wir aufteilen in einen Anteil, der von der Geradanblasung herrührt, $\gamma_g$, und in einen solchen, der infolge Schiebens zusätzlich entsteht, $\beta\gamma_\beta$.

Setzen wir

$$\gamma = \gamma_g + \beta\gamma_\beta \tag{9}$$

[1] Für das Höhenleitwerk ist der Wirkungsfaktor durch $\zeta_H = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{q_H}{q}\alpha_H\right) \approx 1 - \frac{\partial \delta_H}{\partial \alpha}$ definiert.

[2] Siehe Fußnote 10 von S. 1.

und

$$\eta = \frac{2y}{b} = \frac{y}{s}, \tag{10}$$

dann können wir für (6) auch schreiben

$$\zeta_s = 1 \pm \frac{d\gamma_\beta}{d\eta}. \tag{11}$$

Wie bereits gesagt wurde, gilt diese Beziehung für Punkte in Höhe der Wirbelschicht. Da die induzierten Geschwindigkeiten in der Wirbelschicht im allgemeinen eine starke Spitze aufweisen, ist zu erwarten, daß diese Abschätzung zur Berechnung des Wirkungsfaktors des Leitwerkes außerhalb der Wirbelschicht nicht ausreicht, sondern stets zu große Werte liefert. Man muß bei der genaueren Berechnung auch auf die Verhältnisse in größeren senkrechten Abständen von der Wirbelfläche eingehen. Es kommt also darauf an, das gesamte Strömungsfeld am Ort des Seitenleitwerkes zu bestimmen. Für unsere theoretischen Überlegungen nehmen wir an, daß der Flügel ungepfeilt ist.

Nach der *Prandtl*schen Tragflügeltheorie ersetzen wir den Tragflügel durch die gebundenen Wirbel am Ort des Flügels ($l/4$-Linie) und die freien Wirbel, die sich bei Vernachlässigung des

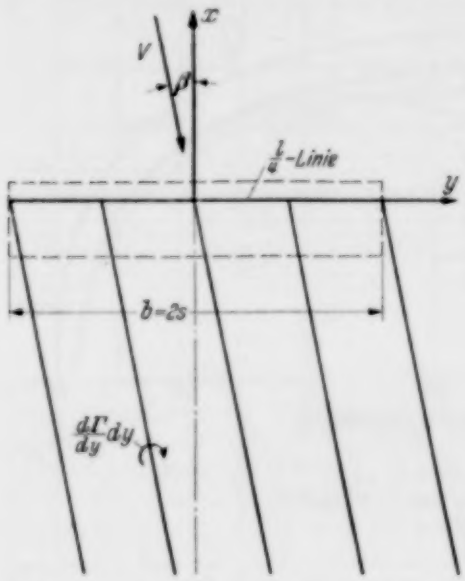



Abb. 3. Das Wirbelsystem des schiebenden Flügels.

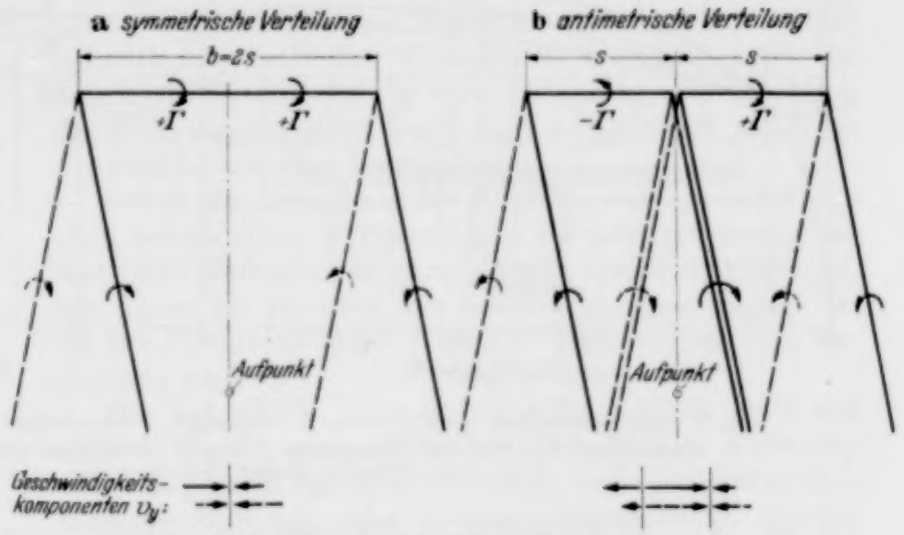



Abb. 4. Zum Einfluß des schräggestellten freien Wirbelbandes auf die induzierte Seitengeschwindigkeit.

Aufrollvorganges in Anströmungsrichtung geradlinig nach hinten bis ins Unendliche erstrecken (Abb.3). Durch die Schrägstellung der freien Wirbel hinter dem Flügel gestaltet sich die mathematische Behandlung des Problems etwas umständlich. Durch eine qualitative Abschätzung dieses Einflusses kann man aber zeigen, daß die Schrägstellung bei unseren Betrachtungen nur untergeordnete Bedeutung hat, so daß wir sie für unsere Rechnungen vernachlässigen können.

Unsere Überlegungen zur Abschätzung des induzierten Seitenwindes durch die Schrägstellung der freien Wirbel führen wir so durch, daß wir bei vorgegebener Auftriebsverteilung einmal die freien Wirbel nach links und zum anderen nach rechts nach hinten abgehen lassen und uns jeweils die Richtung und Größe der induzierten Seitengeschwindigkeit qualitativ überlegen (Abb.4).

Die Auftriebsverteilung spalten wir in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil auf, die wir jeweils getrennt voneinander behandeln. Das Wirbelsystem, das zu der symmetrischen Verteilung gehört, ersetzen wir näherungsweise durch einen schräggestellten Hufeisenwirbel der Spannweitenerstreckung $b = 2\,s$ (Abb. 4a). Das entsprechende Wirbelsystem der antimetrischen Verteilung denken wir uns durch zwei schräggestellte Hufeisenwirbel ersetzt, deren Breite jeweils nur die Halbspannweite $b/2 = s$ ist (Abb. 4b). Auf der einen Seite ist der gebundene Wirbel positiv und auf der anderen Seite negativ drehend. Entsprechend ist auch der Drehsinn der freien Wirbel. Insbesondere geht in der Flügelmitte ein starker Wirbel ab, der aus der Summe der beiden gebundenen Wirbel gebildet wird. Wie aus Abb. 4 hervorgeht, liefern die gebundenen Wirbel keinen Beitrag zum induzierten Seitenwind. Das Seitenleitwerk (Aufpunkt) möge sich soweit hinter dem Flügel befinden, daß die Längen der freien Wirbel, gleichgültig wie ihre Richtung hinter dem Flügel ist, näherungsweise gleich groß sind.

Betrachten wir zunächst die symmetrische Anordnung. Gehen die freien Wirbel nach rechts ab, dann erzeugt der linke Wirbel eine größere Seitengeschwindigkeit als der rechte Wirbel, so daß eine Geschwindigkeitskomponente nach rechts vorhanden ist, wenn wir annehmen, daß sich die Lage des Leitwerkes oberhalb der Wirbelfläche befindet. Gehen dagegen die freien Wirbel nach links ab, dann verbleibt eine Geschwindigkeitskomponente nach links (Abb. 4a). Daraus folgt, daß bei symmetrischer Auftriebsverteilung der Einfluß der Schrägstellung der freien Wirbel auf den induzierten Seitenwind proportional dem Winkel der Schrägstellung (Schiebewinkel) ist. Wie wir nun aber aus (7) ersehen, ist die induzierte Seitengeschwindigkeit proportional dem Gradienten $d\Gamma/dy$. Dieser ist aber bei symmetrischer Auftriebsverteilung in Flügelmitte nur gering, so daß auch der Einfluß, der durch die Schrägstellung der freien Wirbel entsteht, klein sein wird und bei unseren weiteren Überlegungen vernachlässigt werden kann.

Anders liegen die Verhältnisse bei der antimetrischen Anordnung. Gehen die freien Wirbel nach rechts ab, so erzeugen der linke und rechte Wirbel nach links gerichtete Geschwindigkeitskomponenten. Der starke in Flügelmitte abgehende Wirbel erzeugt aber infolge seines wesentlich kleineren Abstandes zum Leitwerk eine sehr viel größere Seitengeschwindigkeit nach rechts, so daß insgesamt eine Komponente nach rechts übrig bleibt. Gehen die freien Wirbel nach links ab, so ergibt sich bei ungeänderter Auftriebsverteilung aus entsprechenden Überlegungen dieselbe nach rechts gerichtete Seitengeschwindigkeit (Abb. 4b). Daraus folgt nun das wichtige Ergebnis, daß bei antimetrischer Auftriebsverteilung die Schrägstellung der freien Wirbel die Größe und Richtung der induzierten Seitengeschwindigkeit in erster Näherung nicht beeinflußt. Wir können also näherungsweise die Schrägstellung des freien Wirbelfeldes bei der durch den Rumpf erzeugten antimetrischen Auftriebsverteilung vernachlässigen. Diese Tatsache bringt natürlich wesentliche Vereinfachungen für die Berechnung des induzierten Geschwindigkeitsfeldes hinter dem Flügel [1].

Wir gehen noch einen Schritt weiter in der Vereinfachung, indem wir von der Tatsache Gebrauch machen, daß sich das Seitenleitwerk verhältnismäßig weit hinter dem Flügel befindet, so daß wir im mathematischen Sinne $x \to -\infty$ gehen lassen können. Die Anwendung des *Biot-Savart*schen Gesetzes liefert dann

$$\left.\begin{aligned} v_y(-\infty, y, z) &= \frac{z}{\pi}\int_{-s}^{s} \Gamma(y')\,\frac{y-y'}{[(y-y')^2+z^2]^2}\,dy' ,\\ v_z(-\infty, y, z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-s}^{s} \Gamma(y')\,\frac{z^2-(y-y')^2}{[(y-y')^2+z^2]^2}\,dy' . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Diese Ausdrücke gelten unter der Annahme, daß die Wirbelschicht in der $x, y$-Ebene liegt, so daß $z$ der Abstand des Aufpunktes von der Wirbelschicht ist. Das hier benutzte Koordinatensystem $(x, y, z)$ ist identisch mit dem in Abb. 14 angegebenen experimentellen Achsensystem $(x_e, y_e, z_e)$. Will man die Absenkung der Wirbelschicht berücksichtigen, deren Lage wir mit $z_1 = z_1(x, y)$ bezeichnen wollen, so ist in (12) $z$ durch $(z - z_1)$ zu ersetzen. Führen wir jetzt noch die dimensionslosen Koordinaten

$$\xi = \frac{x}{s}, \qquad \eta = \frac{y}{s}, \qquad \zeta = \frac{z}{s}, \qquad \zeta_1 = \frac{z_1}{s}, \tag{13}$$

sowie nach (8) $\gamma = \Gamma/bV$ ein, dann wird für die induzierte Seitengeschwindigkeit aus (12)

$$\frac{v_y}{V}(-\infty, \eta, \zeta - \zeta_1) = \frac{2\,(\zeta-\zeta_1)}{\pi}\int_{-1}^{1} \gamma(\eta')\,\frac{\eta-\eta'}{[(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta_1)^2]^2}\,d\eta' . \tag{14}$$

[1] Die induzierten Geschwindigkeitskomponenten für das in Abb. 3 dargestellte Wirbelsystem wurden vom erstgenannten Verfasser auf Grund des *Biot-Savart*schen Gesetzes berechnet. Die Ausdrücke, die man dabei findet, sind aber sehr unübersichtlich, so daß auf die Wiedergabe hier verzichtet wird, zumal wir gezeigt haben, daß die Schrägstellung der freien Wirbel keinen entscheidenden Einfluß hat. Greift man auf eine neuere Arbeit vom zweitgenannten Verfasser (Das Geschwindigkeitspotential der tragenden Fläche bei inkompressibler Strömung (erscheint demnächst in der Z. angew. Math. Mech.) zurück, so kann man den allgemeinen Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential folgendermaßen finden:

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{\cos\beta}{4\pi}\int_{-s}^{s} \Gamma(y')\,\frac{z}{[x\sin\beta + (y-y')\cos\beta]^2 + z^2}\left[1 - \frac{x\cos\beta - (y-y')\sin\beta}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+z^2}}\right] dy'$$

Hieraus berechnen sich die Geschwindigkeitskomponenten zu

$$v_x = \partial\Phi/\partial x, \qquad v_y = \partial\Phi/\partial y, \qquad v_z = \partial\Phi/\partial z,$$

was für $\beta = 0$ und $x = -\infty$ sofort auf (12) führt.

Ist jetzt die Auftriebsverteilung längs Spannweite bekannt, so liefert die Auswertung des Integrals (14) den gesuchten induzierten Seitenwind in Abhängigkeit von der Hoch- und Seitenlage des Aufpunktes (Seitenleitwerkes). Im Fall, daß $\zeta = \zeta_1$ ist, d. h. in Höhe der Wirbelschicht, ist das Integral über eine singuläre Stelle zu bilden. Eine genaue Grenzwertbildung liefert dann den Wert der Gleichung (7), der sich in dimensionsloser Form folgendermaßen schreibt:

$$\frac{v_y}{V}(-\infty, \eta, 0) = \pm \frac{d\gamma}{d\eta}(\eta) . \tag{15}$$

Für die Zirkulationsverteilung hatten wir nach (9) bereits geschrieben $\gamma = \gamma_g + \beta\gamma_\beta$. Hierin bedeutet $\gamma_g$ die Verteilung bei Geradanblasung. Das Glied $\beta\gamma_\beta$ erfaßt die zusätzlich beim Schieben erzeugte Verteilung. Sie umfaßt die folgenden beiden Anteile:

1. Die Zirkulationsänderung des Flügels allein, herrührend von der Herabsetzung der wirksamen Anströmungsgeschwindigkeit, von der Schrägstellung des freien Wirbelbandes und von der seitlichen Umströmung der Flügelenden.

2. Die Zirkulationsänderung herrührend von der seitlichen Rumpfumströmung.

Den ersten Anteil, den man für einen ungepfeilten Flügel z. B. nach *Weissinger*[1] berechnen kann (vgl. Abb.2), wollen wir, wie bereits erwähnt wurde, vernachlässigen. Auch der Einfluß einer V-Stellung, der ebenfalls in Abb. 2 gezeigt ist, kann unberücksichtigt bleiben. Der zweite Anteil, der Rumpfeinfluß, ist dagegen besonders stark, so daß wir mit $\beta\gamma_\beta$ fortan nur die zusätzliche Auftriebsverteilung durch den Rumpf bezeichnen wollen.

Setzen wir jetzt (9) in (14) ein, führen die Differentiation nach dem Schiebewinkel $\beta$ aus und setzen dieses Ergebnis in (6) ein, dann finden wir den örtlichen Wirkungsfaktor in einem bestimmten Punkt des Seitenleitwerkes zu

$$\zeta_{S\,\ddot{o}rtl}(\eta, \zeta - \zeta_1) = 1 + \frac{2(\zeta - \zeta_1)}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\eta - \eta'}{[(\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta_1)^2]^2} \gamma_\beta(\eta')\, d\eta' . \tag{16}$$

Den Grenzwert $\zeta = \zeta_1$ hatten wir bereits in (11) zu

$$\zeta_{S\,\ddot{o}rtl}(\eta, 0) = 1 - \frac{\zeta - \zeta_1}{|\zeta - \zeta_1|} \frac{d\gamma_\beta}{d\eta}(\eta) \tag{16a}$$

bestimmt.

Die Auswertung der Formel (16) setzt nun die Kenntnis der durch den Rumpf erzeugten Auftriebsverteilung voraus. Außerdem muß die Lage der Wirbelschicht $\zeta_1$ bekannt sein. In einer früheren Arbeit wurden vom erstgenannten Verfasser[2] bereits die beim Schieben zusätzlich auftretenden Auftriebsverteilungen berechnet. Dabei wurden Flügelform, Flügelhochlage, Seitenverhältnis, Rumpfform und Verhältnis von Flügelbreite zu Rumpfbreite geändert. Der Rumpfeinfluß auf den Abwind hinter dem Flügel macht sich dadurch bemerkbar, daß eine antimetrische Verformung der Wirbelfläche eintritt. Da wir der Einfachheit halber mit einer ebenen Wirbelfläche rechnen wollen, wird sich deren mittlere Höhenlage durch diesen Einfluß nicht ändern.

Zu dem unsymmetrischen Einfluß des Rumpfes kommt noch ein symmetrischer hinzu, der davon herrührt, daß der Rumpf bei Anstellung eine Anströmungskomponente von unten erfährt. Dadurch ergeben sich beidseitig des Rumpfes zusätzliche Anstellwinkeländerungen, die dann eine entsprechende Auftriebsänderung zur Folge haben. Dieser Einfluß wurde in einer Arbeit von *F. Riegels* und *W. Liess*[3] für verschiedene Rumpfformen berechnet. Durch diese symmetrischen Verteilungen, die überdies stark von der Hochlage des Flügels zum Rumpf abhängen, wird die Lage der Wirbelschicht am Ort des Leitwerkes entscheidend mitbestimmt.

b) Die numerische Berechnung des Wirkungsfaktors für einige Rumpf-Flügel-Anordnungen. Wir haben zunächst das Feld der induzierten Geschwindigkeiten für einen symmetrisch angeströmten Rechteckflügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 5$ berechnet. In Abb. 5 haben wir die Kurven $\delta_H/\alpha = \text{konst.}$ bzw. $\delta_S/\alpha = \text{konst.}$ einmal in der $(\eta, \zeta - \zeta_1)$-Ebene und zum anderen die Werte $\delta_H/\alpha$ bzw. $\delta_S/\alpha$ über $\eta$ für verschiedene Hochlagen $(\zeta - \zeta_1)$ aufgetragen. Aus den Geschwindigkeitskomponenten $v_y$ und $v_z$ wurde auch das Stromlinienbild der induzierten Strömung ermittelt. Der Fall des schiebenden Flügels wurde nicht durchgerechnet. Aus dem Vergleich der Auftriebsverteilungen des schiebenden und nicht schiebenden Flügels, vgl. Abb.2,

[1] *J. Weissinger*, Jahrbuch 1940 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I 138.
[2] *W. Jacobs*, Jahrbuch 1941 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I 170.
[3] Siehe Fußnote 4 von S. 1.

kann man schließen, daß durch das Schieben lediglich in den uns hier nicht interessierenden Randgebieten Abweichungen auftreten werden. Diese Untersuchungen am Flügel allein dienten lediglich der Orientierung.

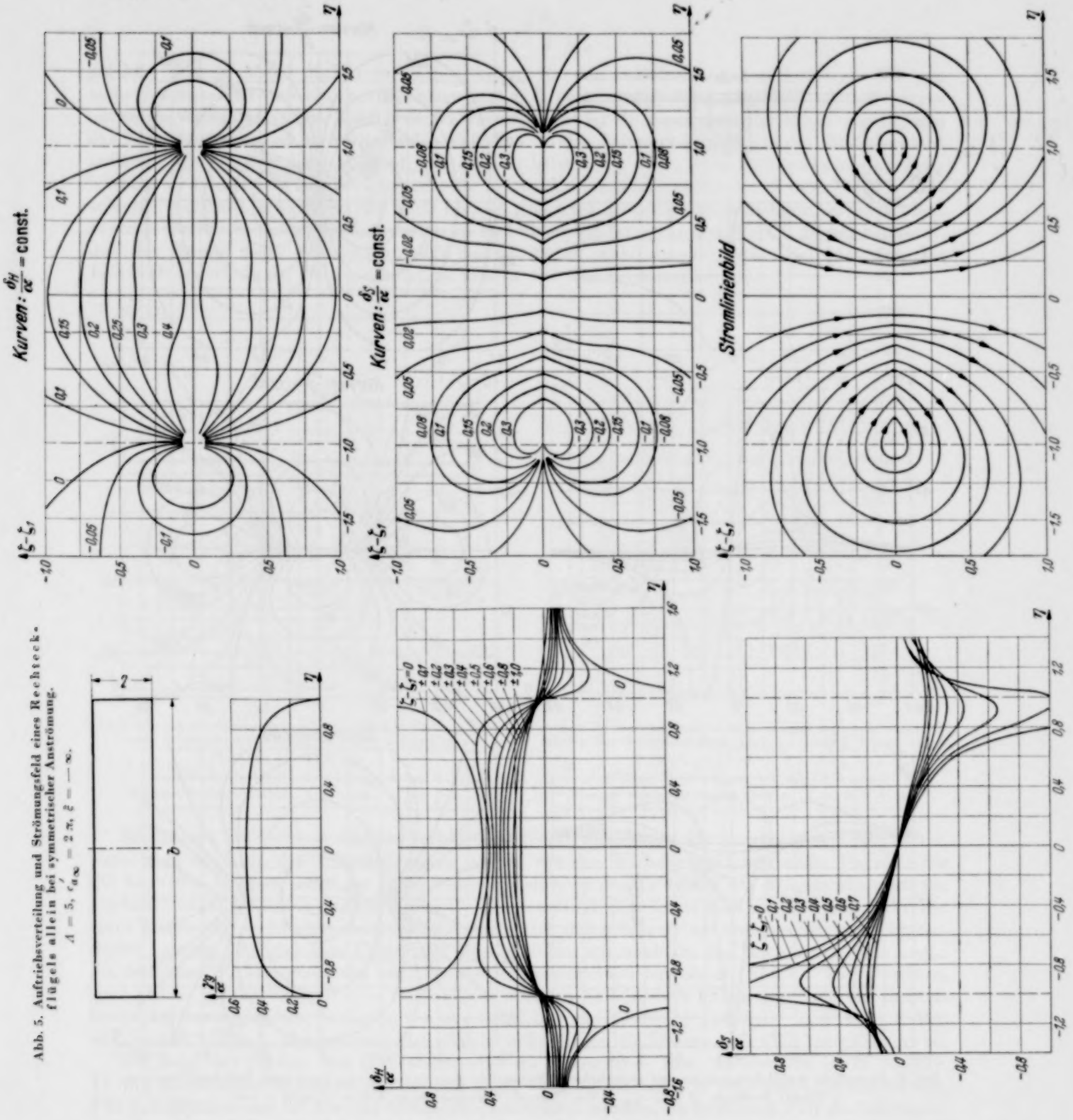



Abb. 5. Auftriebsverteilung und Strömungsfeld eines Rechteckflügels allein bei symmetrischer Anströmung. $\Lambda = 5$, $c'_{a\infty} = 2\pi$, $\varepsilon = -\infty$.

Wie wir schon mehrfach betont haben, liefert die beim Schieben durch den Rumpf erzeugte antimetrische Auftriebsverteilung den entscheidenden Einfluß bei der Berechnung des induzierten Seitenwindes. Wir greifen jetzt eine spezielle Flügel-Rumpf-Anordnung heraus, und zwar einen Schulterdecker, bestehend aus einem Rechteckflügel vom Seitenverhältnis $\Lambda = 5$ und einem

Rumpf von kreisförmigem Querschnitt mit der Flügelhochlage $z_0/R = -1$ ($R$ = Halbmesser des Rumpfquerschnittes). Das Verhältnis von Flügelspannweite zu Rumpfdurchmesser beträgt $b/D = 7{,}5$. Wir betrachten jetzt nur den zusätzlich durch die Queranströmung des Rumpfes er-

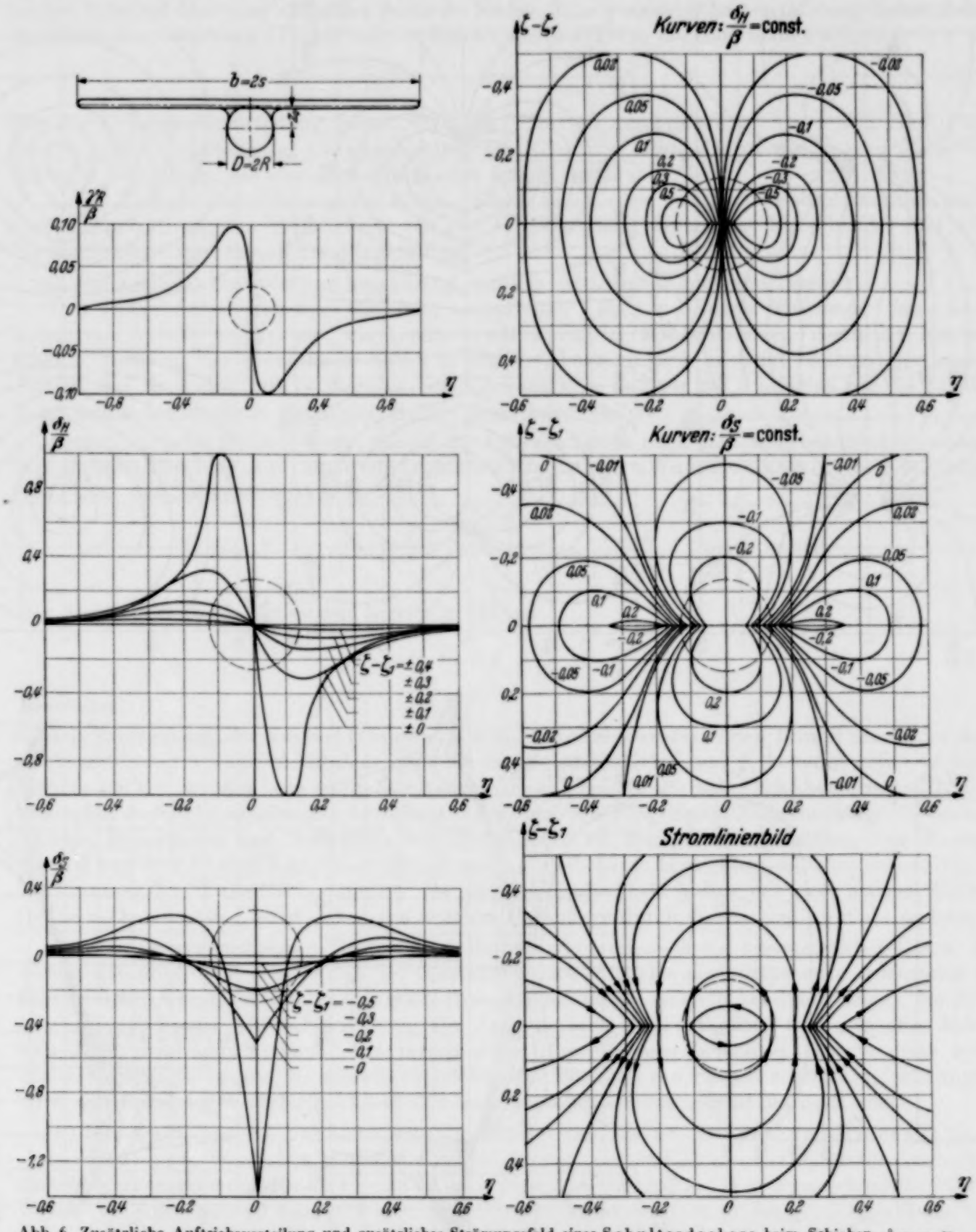



Abb. 6. Zusätzliche Auftriebsverteilung und zusätzliches Strömungsfeld eines Schulterdeckers beim Schieben. $\xi = -\infty$. Flügel: Rechteck, $A = 5$, $c_{a_\infty}' = 2\pi$. Rumpf: Kreisquerschnitt, $b/D = 7{,}5$, $z_0/R = -1$.

zeugten Einfluß. Abb.6 stellt die der Abb.5 entsprechende Auftragung dar. Für die uns besonders interessierenden induzierten Seitengeschwindigkeiten entnehmen wir der Abbildung folgendes: Die Kurven $\delta_S/\beta$ = konst. verlaufen zur $(x, z)$-Ebene symmetrisch. Oberhalb der Wirbelschicht, $(\zeta - \zeta_1) < 0$, ergeben sich im Bereich der Flugzeugsymmetrieebene negative Werte, unterhalb, $(\zeta - \zeta_1) > 0$, entsprechend positive Werte. Innerhalb der Wirbelschicht sind die Werte am größten.

Aus der Auftragung ist der starke Einfluß des Strömungsfeldes des Flügels auf die Lage des Seitenleitwerkes ersichtlich, wobei jedoch auch noch die Lage der Wirbelschicht $\zeta_1$ bekannt sein muß. Ausgehend von (6) haben wir die örtliche Seitenleitwerks-Wirksamkeit

$$\zeta_{S\,\text{örtl}} = 1 - \left(\frac{\delta_S}{\beta}\right)_{\text{örtl}}$$

gebildet und in Abb.7 die Kurven $\zeta_{S\,\text{örtl}} = \text{konst.}$ für den Schulterdecker aufgetragen. Für ein zentrales Seitenleitwerk üblicher Hochlage tritt z. B. eine beträchtliche Abminderung der Seitenleitwerks-Wirksamkeit ein. Kurz über der Wirbelschicht ist sie sogar null. Die ungünstigste Lage des Seitenleitwerkes ist im vorliegenden Fall die, wo das Leitwerk gerade auf der Wirbelschicht aufsitzt. Mit wachsendem Abstand von der Wirbelschicht, z. B. beim Höhersetzen des Leitwerkes, wird der Rumpfeinfluß geringer; die Leitwerkswirksamkeit nähert sich dem Wert 1. Verschieben wir das Leitwerk aus der Mitte heraus, gehen wir also zum doppelkieligen Leitwerk über, so steigt die Wirksamkeit des Leitwerkes an und überschreitet sogar den Wert 1. Dieses bedeutet, daß der Rumpf beim Schieben auf das Seitenleitwerk stabilisierend wirkt. Befindet sich das Leitwerk unterhalb der Wirbelschicht, so kehren sich die Verhältnisse um.

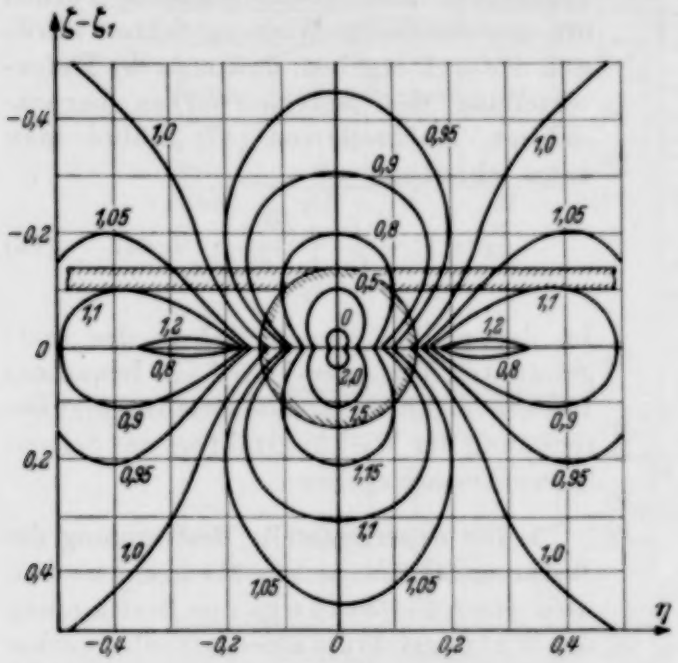



Abb.7. Kurven konstanten theoretischen örtlichen Wirkungsfaktors des Seitenleitwerkes ($\zeta_{S\,\text{örtl}} = \text{konst.}$) hinter einem Schulterdecker, $\xi = -\infty$.
Flügel: Rechteck, $\Lambda = 5$, $c'_{a\infty} = 2\pi$.
Rumpf: Kreisquerschnitt, $b/D = 7{,}5$ $z_0/R = -1$.

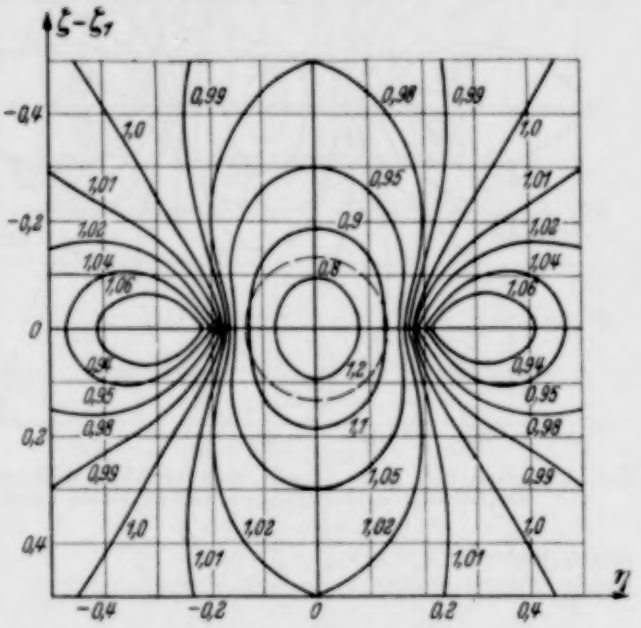



Abb. 8. Kurven konstanten theoretischen örtlichen Wirkungsfaktors des Seitenleitwerkes ($\zeta_{S\,\text{örtl}} = \text{konst.}$) hinter einem Schulterdecker, $\xi = -\infty$.
Flügel: Rechteck, $\Lambda = 5$, $c'_{a\infty} = 2\pi$.
Rumpf: Kreisquerschnitt, $b/D = 7{,}5$, $z_0/R = -0{,}5$.

Bei einem Tiefdecker sind die Verhältnisse gerade umgekehrt wie bei einem Schulterdecker, wenn man die Lage des Seitenleitwerkes jeweils von der Wirbelschicht aus mißt. Da aber für die Lage der Wirbelschicht, die ja im wesentlichen vom Anstellwinkel des Flügels abhängt, die Umkehrbarkeit zwischen Schulter- und Tiefdecker nicht gilt, kann man die Wirkungsfaktoren eines Tiefdeckers nicht ohne weiteres entgegengesetzt gleich denen eines entsprechenden Schulterdeckers setzen. Bei gleichem Flügel und Rumpf haben wir noch für die Hochlage $z_0/R = -0{,}5$ die örtlichen Wirkungsfaktoren am Ort des Seitenleitwerkes berechnet (Abb.8). Die Einflüsse sind kleiner als die bei $z_0/R = -1$. In einem anderen Fall (Abb.9) haben wir noch die Rumpfbreite bei sonst gleichen Verhältnissen wie in Abb. 7 ($z_0/R = -1$) geändert; und zwar haben wir gewählt $b/D = 5$. Mit größerer Rumpfdicke nimmt auch die Änderung des Wirkungsfaktors zu.

Die Lage des Seiten- und Höhenleitwerkes im Seitenwind- bzw. Abwindfeld ist in Abb.10, 11 und 12 für einen Schulter-, Mittel- und Tiefdecker bei einkieligem Seitenleitwerk dargestellt. Für den Mitteldecker ist nur das Abwindfeld gezeichnet worden, da in diesem Fall die induzierte Seitengeschwindigkeit verschwindet. Die Rechnung wurde durchgeführt für einen Rumpf mit kreisförmigem Querschnitt und einem Rechteckflügel mit symmetrischem Profil.

Die Daten sind:
Flügel: Rechteck, $\Lambda = 5$, $c'_{a\infty} = 2\pi$, $\varepsilon_R = 0°$,
Rumpf: Kreisquerschnitt, $b/D = 7{,}5$,
Höhenleitwerk: $b_H/b = 0{,}33$, Seitenleitwerk: $b_S/b = 0{,}175$;

$\varepsilon_R$ bedeutet die Schränkung des Flügels zur Rumpfachse, $b_S$ die Höhe des Seitenleitwerkes und $b_H$ die Spannweite des Höhenleitwerkes. Die Abhängigkeit vom $c_a$-Wert wurde durch die Wahl von $c_a = 0$; 0,5 und 1,0 untersucht. Das Koordinatensystem ist flugzeugfest. Der Nullpunkt liegt auf der Rumpfachse in 1/4 der Flügeltiefe. Die Kurven $\zeta_H$ = konst. und $\zeta_S$ = konst. sind gerechnet worden für $\xi = -\infty$, während die Absenkung der Wirbelfläche sich auf die Lage des Leitwerkes bei $\xi = -1{,}2$ bezieht. Die theoretische Lage der Wirbelschicht bei verschiedenen Schränkungen des Flügels zur Rumpfachse ist für den Schulter- und Tiefdecker in Abb. 13 dargestellt. Für ein bestimmtes Leitwerk ist über seine Höhe bzw. Breite zu integrieren, um die mittlere Wirksamkeit zu erhalten. Für den Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes wird der folgende Mittelwert gebildet:

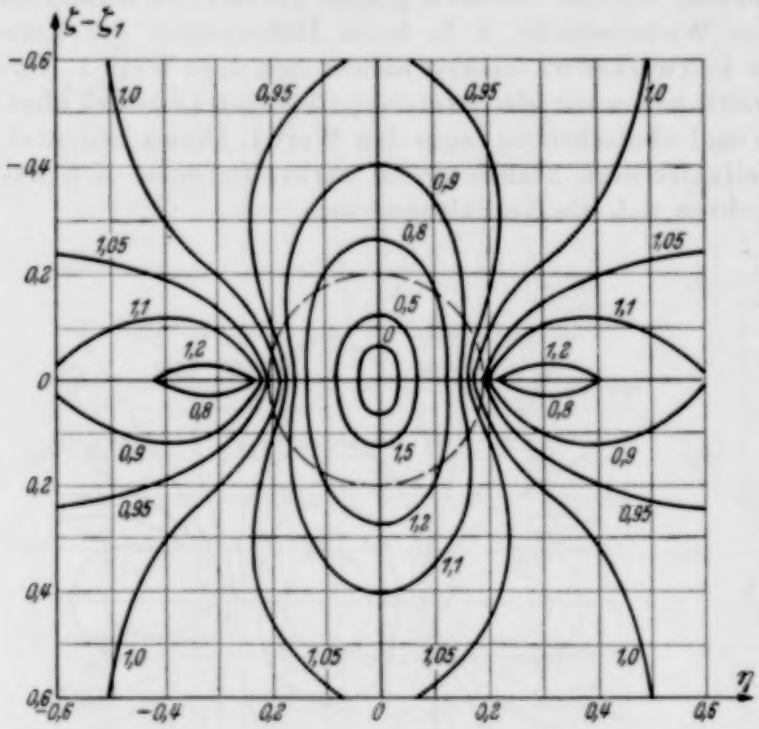



Abb. 9. Kurven konstanten theoretischen örtlichen Wirkungsfaktors des Seitenleitwerkes ($\zeta_{S\,örtl}$ = konst.) hinter einem Schulterdecker. $\xi = -\infty$.
Flügel: Rechteck, $A = 5$, $c'_{a_\infty} = 2\pi$.
Rumpf: Kreisquerschnitt, $b/D = 5$, $z_0/R = -1$.

$$\bar{\zeta}_S = 1 - \frac{\partial \delta_S}{\partial \beta} = 1 - \frac{1}{b_S}\int_{b_S}\left(\frac{\partial \delta_S}{\partial \beta}\right)_{\text{örtl}} dz. \quad (17)$$

Für das gewählte Flugzeug sind diese Mittel-Werte in den Abbildungen mitangegeben. Eine etwas genauere Formel für den mittleren Wirkungsfaktor würde sich dadurch ergeben, daß man die Tiefenverteilung des Seitenleitwerkes berücksichtigt. An Stelle von (17) müßte man dann schreiben

$$\bar{\zeta}_S = 1 - \frac{1}{F_S}\int_{b_S}\left(\frac{\partial \delta_S}{\partial \beta}\right)_{\text{örtl}} l_S\, dz. \quad (18)$$

In der nachfolgenden Arbeit des erstgenannten Verfassers[1] wird ein bequemes Rechenverfahren für eine serienmäßige Berechnung des Wirkungsfaktors des Seitenleitwerkes angegeben.

**4. Die experimentelle Bestimmung des Wirkungsfaktors.** a) Die Meßmethoden und die Auswertung. Zur Bestimmung des Wirkungsfaktors eines Seitenleitwerkes aus Windkanalmessungen für eine vorgegebene Flügel-Rumpf-Anordnung stehen folgende zwei Methoden zur Verfügung:

1. Sechskomponentenmessung mit und ohne Leitwerk. Aus einer Messung des Giermomentes für das Gesamtmodell (Flügel + Rumpf + Leitwerk) und für das Modell ohne Leitwerk (Flügel + Rumpf) erhält man durch Differenzbildung den Beitrag des Seitenleitwerkes zum Giermoment. Aus dem Verhältnis dieser Differenz zu dem Wert des Leitwerks allein ergibt sich dann der Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes. Unter Vernachlässigung einer Staudruckänderung am Leitwerk stellt die Abweichung des Wirkungsfaktors vom Wert 1 den Einfluß des induzierten Seitenwindes dar. Wir schreiben

$$\bar{\zeta}_{S_N} = \frac{(c'_N)_{F+R+L} - (c_N)_{F+R}}{(c'_N)_L}. \quad (19)$$

Der Index $N$ bei $\bar{\zeta}_S$ bedeutet, daß die Giermomentenmessungen zur Bestimmung von $\bar{\zeta}_S$ benutzt worden sind. $c'_N = \partial c_N/\partial\beta$ gibt den Giermomentenanstieg mit dem Schiebewinkel an. Um den Beitrag des Leitwerks allein zum Giermomentenanstieg zu bestimmen, nimmt man zweckmäßigerweise die Differenz aus einer Messung von Rumpf + Leitwerk und Rumpf allein, wodurch man in erster Näherung die Abschirmung durch den Rumpf miterfaßt hat:

$$(c'_N)_L = (c'_N)_{R+L} - (c'_N)_R. \quad (20)$$

Diese Beziehung setzen wir in (19) ein und erhalten

$$\bar{\zeta}_{S_N} = \frac{(c'_N)_{F+R+L} - (c'_N)_{F+R}}{(c'_N)_{R+L} - (c'_N)_R}. \quad (21)$$

[1] *W. Jacobs*, Ing.-Arch. 21 (1953) S. 23.

Analog hierzu können wir den Wirkungsfaktor auch aus den Seitenkraftsmessungen finden:

$$\bar{\zeta}_{s_y} = \frac{(c'_y)_{F+R+L} - (c'_y)_{F+R}}{(c'_y)_{R+L} - (c'_y)_R}. \tag{22}$$

Der Index $y$ bei $\bar{\zeta}_S$ deutet die Herleitung aus der Seitenkraft an. Es bedeutet $c'_y = \partial c_y/\partial\beta$ den

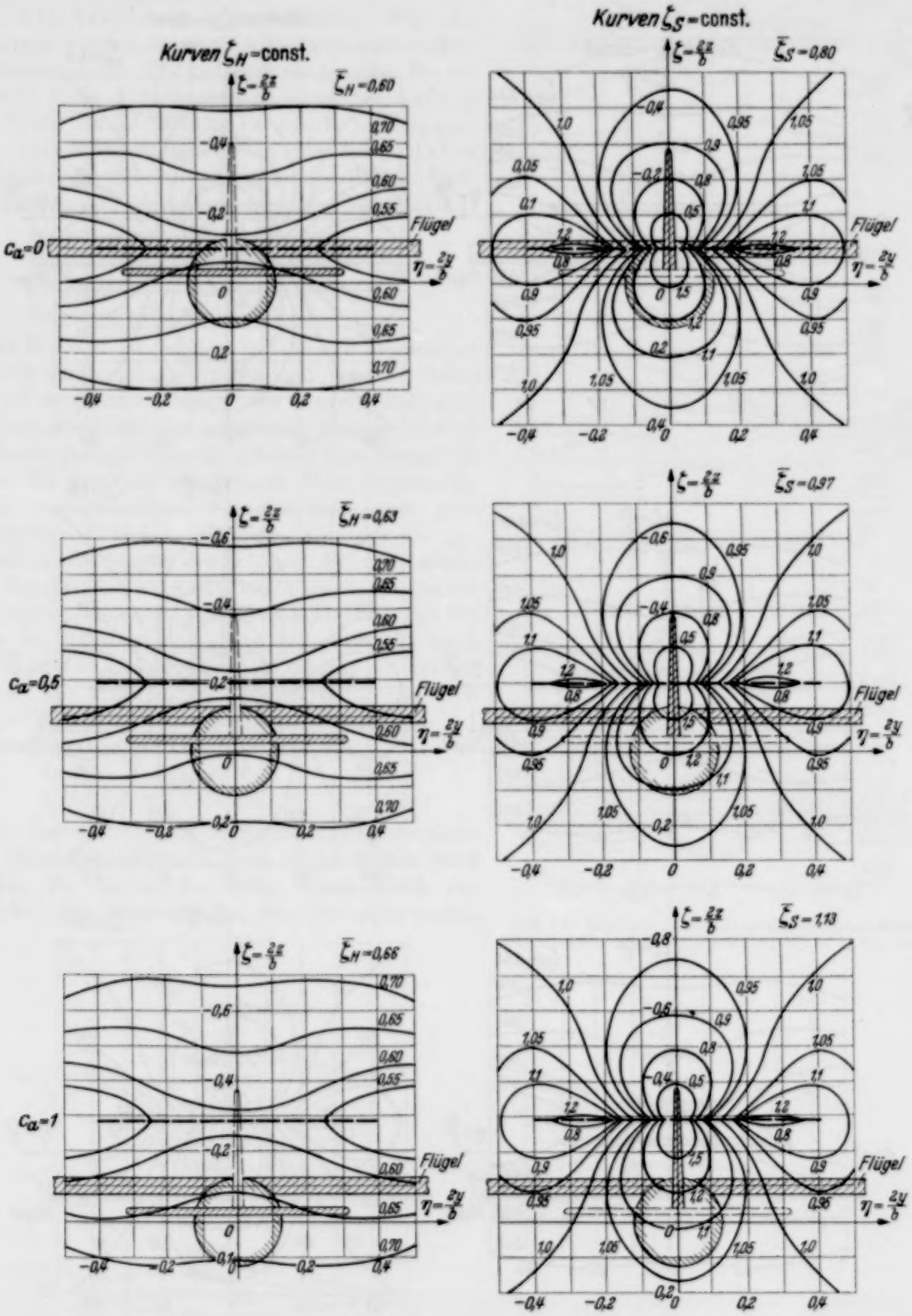



Abb. 10. Lage des Seiten- und Höhenleitwerkes im Seiten- und Abwindfeld eines Schulterdeckers für die drei $c_a$-Werte 0; 0,5 und 1,0.

Seitenkraftsanstieg mit dem Schiebewinkel. Die Werte für $\bar{\zeta}_{s_N}$ und $\bar{\zeta}_{s_y}$ müssen in erster Näherung gleich sein.

2. Punktweises Ausmessen des Strömungsfeldes durch Staudruck- und Richtungsmessungen. Diese Methode ist sehr mühsam. Sie liefert natürlich einen besseren Vergleich mit der Theorie, da die Werte in den einzelnen Punkten direkt verglichen werden können, während bei der Kraftmessung nur Integralwerte über das ganze Leitwerk erhalten werden.

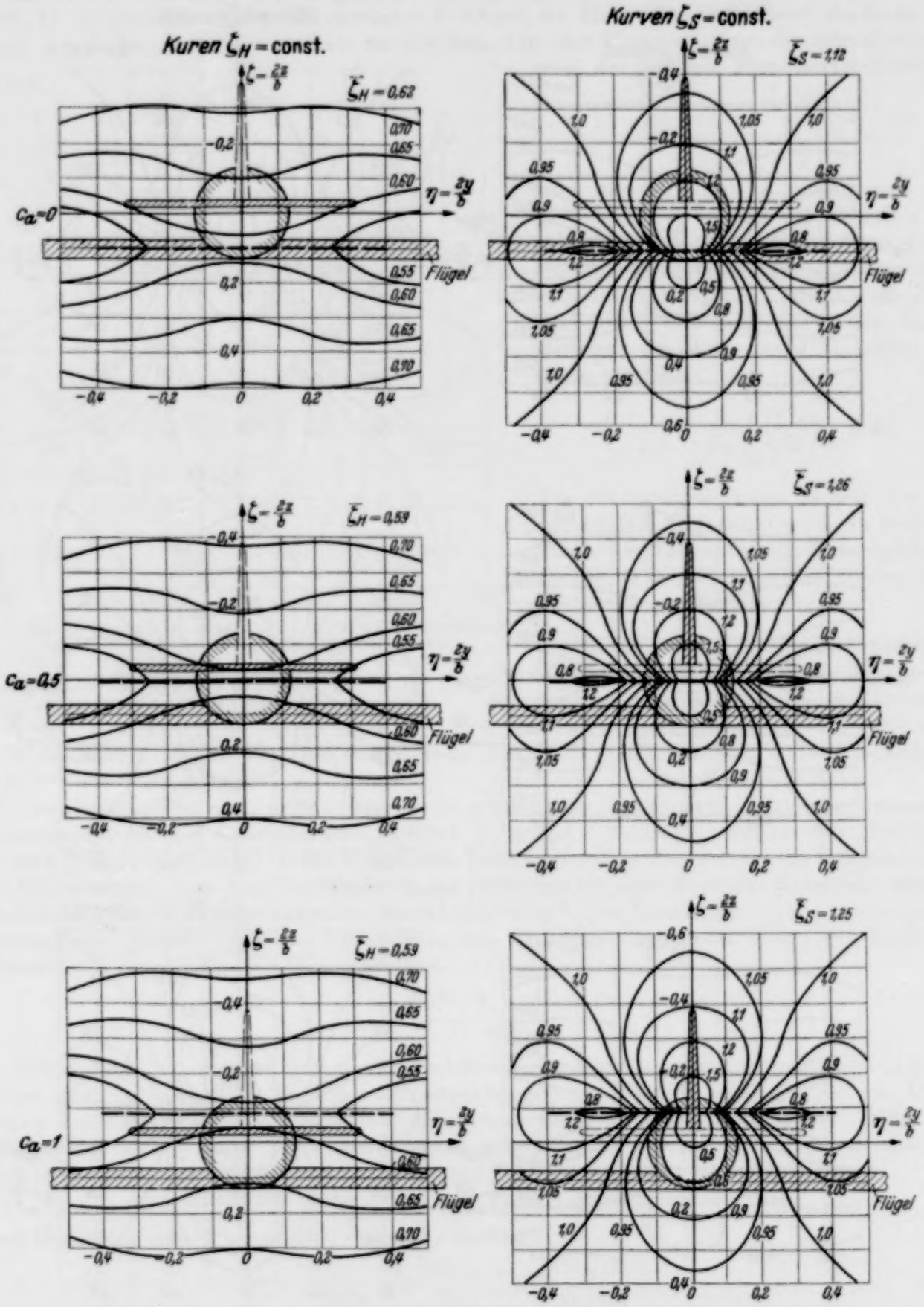



Abb. 11. Lage des Seiten- und Höhenleitwerkes im Seiten- und Abwindfeld eines Tiefdeckers für die drei $c_a$-Werte 0; 0,5 und 1,0.

Von uns wurden beide Methoden an einem Schulter-, Mittel- und Tiefdecker durchgeführt. Es wurde die Abhängigkeit des Wirkungsfaktors von der Hochlage des Flügels zum Rumpf und von der Lage des Seitenleitwerkes untersucht. Auch die Einstellung (Schränkung) des Flügels zum Rumpf wurde verändert.

b) Beschreibung der Modelle. Für die Messungen wurden die in Abb.15 dargestellten Modelle benutzt. Der Flügel war ein gerader Rechteckflügel ohne *V*-Stellung und ohne Verwindung vom Profil NACA 23012. Er besaß Endkappen, deren Abrundungshalbmesser gleich der örtlichen Profildicke war. Der Flügel war in Metall-Gips-Bauweise hergestellt. Die Abmessungen des Flügels sind:

Spannweite: $b = 0{,}770$ m,
Flügelfläche: $F = 0{,}1146$ m²,
Flügeltiefe: $l = 0{,}150$ m,
Seitenverhältnis: $\Lambda = 5{,}18$.

Der Rumpf ist aus dem in früheren Messungen verwendeten Rotationsellipsoid vom Achsenverhältnis 1:7 entstanden, indem der hintere Teil eine Zuspitzung erhielt, um möglichst glatten Abfluß und damit geringe Störungen hinter dem Rumpf zu haben. Er war aus vergütetem Holz hergestellt. Durch auswechselbare Einsatzstücke mit entsprechenden Flügeldurchbrüchen konnten die gewünschten Hochlagen des Flügels erzielt werden. Das Rumpfende war mit einer auswechselbaren Metallspitze versehen, so daß eine Haltestange für das in der Höhe verschiebbare Seitenleitwerk nach der auf Abb.15 ersichtlichen Art eingesetzt werden konnte. Die Haltestange war gekröpft, um auch größere Tieflagen des Leitwerkes zu erreichen.

Die Abmessungen des Rumpfes sind:

Länge: $a = 0{,}650$ m,
Größter Durchmesser: $D = 0{,}104$ m.

Als Leitwerk wurde ein einkieliges Seitenleitwerk ohne Höhenleitwerk vom Profil NACA 0010 benutzt. Es war in der Höhe verschieblich angebracht. Die Abmessungen des Seitenleitwerkes sind:

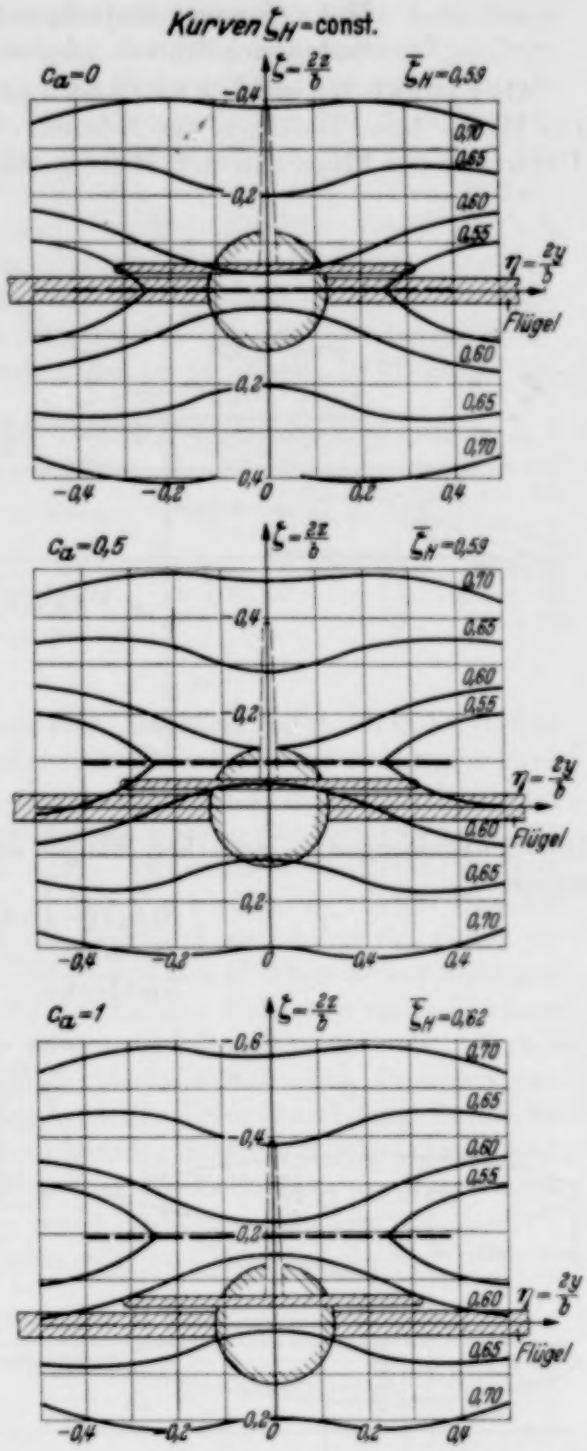



Abb. 12. Lage des Höhenleitwerkes im Abwindfeld eines Mitteldeckers für die drei $c_a$-Werte 0; 0,5 und 1,0.

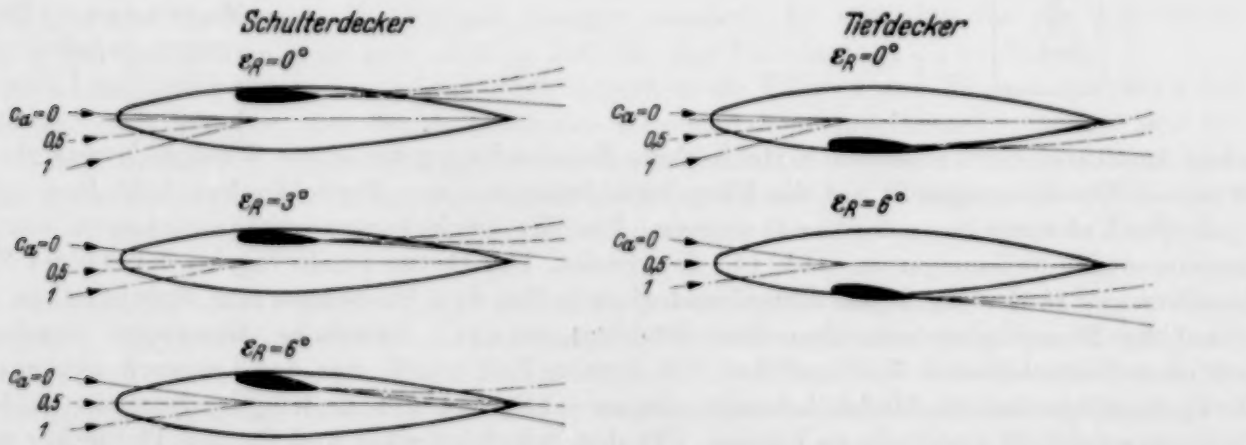



Abb. 13. Theoretische Lage der Wirbelschicht bei verschiedenen Schränkungen des Flügels zum Rumpf für Schulter- und Tiefdecker.

Höhe (Spannweite): $b_S = 0{,}113$ m, Fläche: $F_S = 0{,}00918$ m², Seitenverhältnis: $\Lambda_S = 1{,}40$, Hebelarm: $r_S = 0{,}50$ m.

Als Flügel-Rumpf-Anordnungen wurden Schulter-, Mittel- und Tiefdecker gewählt. Die Hoch- bzw. Tieflagen für Schulter- und Tiefdecker wurden so bestimmt, daß Ober- bzw. Unterseite des Flügels in der Mitte gerade mit der Rumpfoberfläche abschlossen. Als charakteristische Größe wird der Abstand $z_0$ der $l/4$-Linie der Flügelebene von der Rumpfachse angesehen. Es ergaben sich folgende Hochlagen:

Schulterdecker: $2\,z_0/D' = -0{,}754$,
Mitteldecker: $= +0{,}050$,
Tiefdecker: $= +0{,}854$.

$D'$ bedeutet den Durchmesser des Rumpfes am Ort der $l/4$-Linie des Flügels.

Die Rücklage des Flügels ($e$ = Abstand der $l/4$-Linie von der Rumpfnase) war in allen Fällen gleich und betrug

$$e/a = 0{,}35.$$

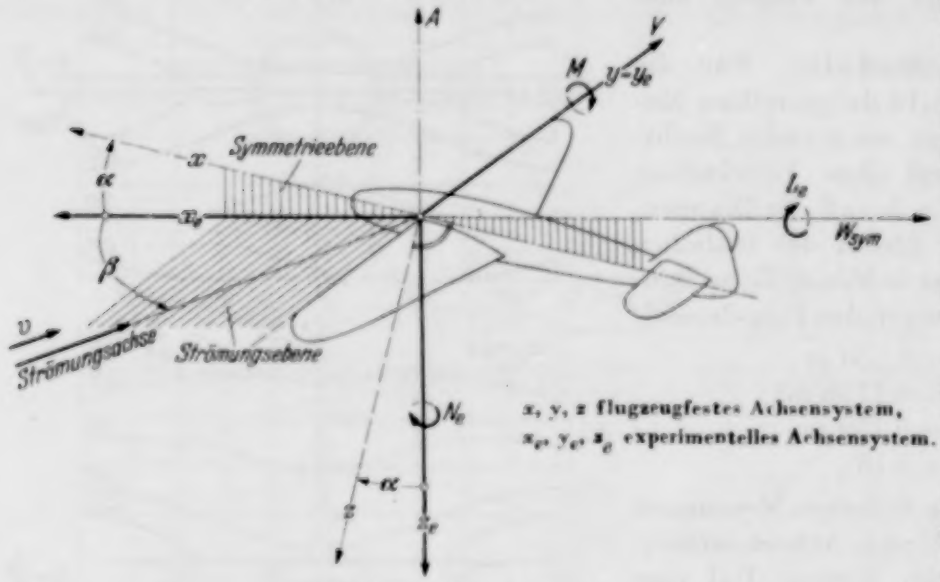



Abb. 14. Achsensysteme.

x, y, z flugzeugfestes Achsensystem,
$x_e$, $y_e$, $z_e$ experimentelles Achsensystem.

Die Schränkungen $\varepsilon_R$ zwischen Flügel und Rumpf (positiv im Sinne erhöhten Anstellwinkels) waren

Schulterdecker: $\varepsilon_R = 0°,\ 3°,\ 6°$,
Mitteldecker: $0°$,
Tiefdecker: $0°,\ 6°$.

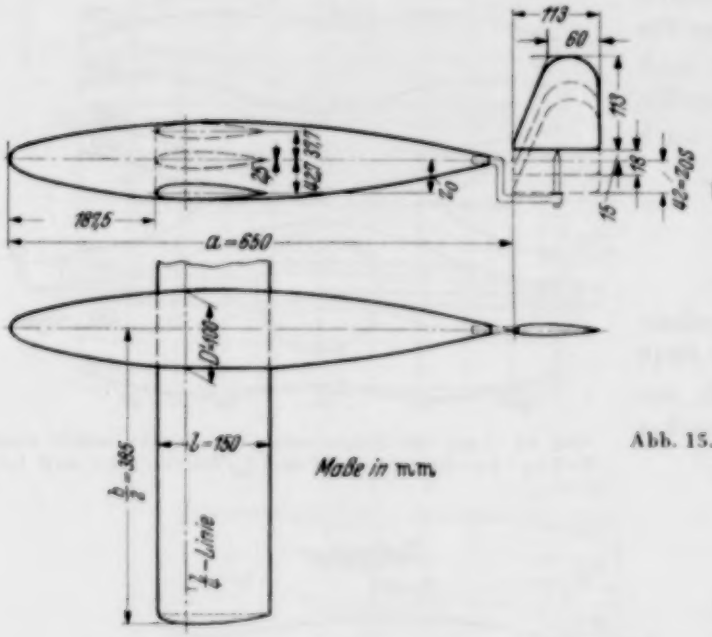


Abb. 15. Modellübersicht.

Der Flügel war mit einer Flügelwurzelverkleidung versehen, die in Abb. 15 angedeutet ist. Neben diesen Anordnungen mit und ohne Seitenleitwerk wurde auch noch der Rumpf allein mit und ohne Seitenleitwerk gemessen.

Zur Richtungsmessung diente ein Vierfingergerät üblicher Bauart.

c) Durchführung und Umfang der Messungen. Die Messungen wurden durchgeführt im 1,2-m-Windkanal des Aerodynamischen Institutes der Technischen Hochschule Braunschweig bei einer Windgeschwindigkeit von 40 m/sec. Dieses entspricht auf die Flügeltiefe bezogen einer *Reynolds*schen Zahl $Re = 4{,}2 \cdot 10^5$.

1. Sechskomponentenmessungen. Für die Sechskomponentenmessungen wurde das experimentelle Achsensystem, Abb. 14, verwendet. Der Bezugspunkt lag bei den Flügel-Rumpf-Anordnungen in der Mitte der Flügelvorderkante, bei den Messungen am Rumpf allein wurde er auf die Rumpfachse mit derselben Rücklage verlegt. Sämtliche Messungen wurden mit und ohne Seitenleitwerk durchgeführt. Im letzten Fall wurde nur das Leitwerk abgenommen; die Haltestange also am Modell belassen, um ausschließlich den Beitrag des Seitenleitwerkes zur Richtungsstabilität ermitteln zu können. Für den Schulterdecker und für den Tiefdecker wurden jeweils drei Hochlagen des Seitenleitwerkes gewählt. Als charakteristische Größe wird hierbei

der Abstand des tiefsten Leitwerkspunktes von der Rumpfachse angesehen. Wir bezeichnen diesen Abstand mit $z_{0S}$. Außerdem wurde noch die Schränkung des Flügels geändert. Die Dreikomponentenmessungen wurden für eine bestimmte Flügel-Rumpf-Anordnung nur einmal durchgeführt, da die Hochlage des Seitenleitwerkes kaum von Einfluß sein dürfte. Die Sechskomponentenmessungen wurden für den Schiebewinkelbereich $\beta = \pm 30°$ im allgemeinen für drei Anstellwinkel durchgeführt. Nur für den Mitteldecker beschränkten wir uns auf einen Anstellwinkel und auf eine Höhenlage des Leitwerkes, weil hier die erwarteten Einflüsse sehr klein sind. Bei den Messungen am Rumpf allein mit und ohne Seitenleitwerk zeigte sich, daß die Abschirmung des Seitenleitwerkes durch den Rumpf ziemlich stark vom Anstellwinkel abhängt. Es mußten daher hierfür auch dieselben Anstellwinkel gewählt werden wie bei den Gesamtmodellen. Eine Übersicht der durchgeführten Sechskomponentenmessungen ist in Tabelle 1 enthalten.

Tabelle 1. *Übersicht der Drei- und Sechskomponentenmessungen.*

| Anordnung | Leitwerk | Schränkung $\varepsilon_R$ | Lage des Leitwerkes $z_{0S}$ (mm) |
|---|---|---|---|
| Schulterdecker . . | einkielig | 0°, 3°, 6° | −15, +18, +42 |
| Tiefdecker . . . . | „ | 0°, 6° | −15, + 5, +25 |
| Mitteldecker . . . | „ | 0° | + 5 |

2. Richtungsmessungen. Bei den Richtungsmessungen wurden das Leitwerk sowie die Haltestange entfernt, und der Rumpf mit der passenden Spitze versehen, um möglichst geringe Störungen infolge Abreißens der Strömung zu haben. Es wurde jeweils das gesamte Richtungsfeld, also sowohl der Abwind wie auch der Seitenwind gemessen. Die Messung geschah so, daß in einem bestimmten Abstand bei einem festen Schiebewinkel eine Ebene $x = \text{konst.}$ ausgemessen wurde und zwar in verschiedenen Schichten $z = \text{konst.}$ Es wurden die Schiebewinkel $\beta = 0°$, 5°, 10° und 15° gewählt. Der Koordinatenursprung wurde hierbei stets in das Rumpfende gelegt.

Das bei der Messung benutzte Vierfingergerät wurde vorher im ungestörten Strahl geeicht. Mit genügender Genauigkeit ergab sich für den Seitenwind dieselbe Eichkurve wie für den Abwind. Diese Methode war in unserem Fall einfacher als die Nullmethode, wobei das Gerät solange gedreht wird, bis die zwei gegenüberliegenden Pitot-Röhrchen den gleichen Druck anzeigen. Bei Messungen mit Vierfingergeräten, deren gegeneinander geschaltete Röhrchen einen gewissen Abstand voneinander haben, ist besonders darauf zu achten, daß in Gebieten mit starken Geschwindigkeitsgradienten die Messungen gefälscht werden, weil die Röhrchen dann mit verschiedenen Geschwindigkeiten angeblasen werden. Dieses tritt ein beim Durchgang durch die Nachlaufdelle von Rumpf und Flügel. Da diese Dellen bei gesunder Strömung sehr schmal sind, kann man die etwas außerhalb der Delle gemessenen Werte in die Delle hinein extrapolieren. Dieses wurde bei den Auswertungen beachtet.

Eine Übersicht der durchgeführten Richtungsmessungen geht aus Tabelle 2 hervor.

Tabelle 2. *Übersicht der Richtungsmessungen.*

| Anordnung | Schränkung $\varepsilon_R$ | Anstellwinkel $\alpha$ | Abstand hinter Rumpfheck $x$ (mm) |
|---|---|---|---|
| Schulterdecker | 0°, 6° | −1°, 5,7° | −10 |
| Tiefdecker | 0° | −1°, 5,7° | −10 |

Neben den Messungen dicht hinter dem Rumpfende ($x = -10$ mm) wurden auch einige Stichmessungen für den Meßquerschnitt bei $x = -120$ mm durchgeführt.

d) Meßergebnisse und Vergleich mit der Theorie. Als Bezugsgrößen sind bei der Bildung der dimensionslosen Beiwerte die Größen des Flügels benutzt worden. Es gilt also für die Seitenkraft $c_y = Y/Fq$, für das Rollmoment $c_L = L/Fsq$ und für das Giermoment $c_N = N/Fsq$.

1. Dreikomponentenmessungen. Abb. 16 enthält die Polaren und Momentenkurven der verschiedenen Anordnungen. Die Widerstände der verschiedenen Modelle unterscheiden sich bis auf den Bereich höherer $c_a$-Werte fast gar nicht voneinander. Trotz guter Flügelwurzelverkleidung reißt beim Tiefdecker die Strömung eher ab als beim Mittel- und Schulterdecker. Dieses ist aber für unsere Messungen belanglos, da wir in dem gesunden Bereich der anliegenden Strömung bleiben.

2. Sechskomponentenmessungen. Auf die gesamten Messungen wollen wir im einzelnen nicht eingehen. Es wurde jeweils für eine bestimmte Flügel-Rumpf-Anordnung eine Messung mit und ohne Seitenleitwerk gemacht. Hinsichtlich des Auftriebes, des Widerstandes und des Kippmomentes in Abhängigkeit vom Schiebewinkel wurden die schon aus früheren Messungen[1]

[1] Vgl. Fußnoten 5, 10 und 11 von S. 1 sowie *E. Möller*, Jahrbuch 1942 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I 336.

bekannten Interferenzen beobachtet. Es spielt hierbei die Hochlage des Flügels zum Rumpf eine wichtige Rolle.

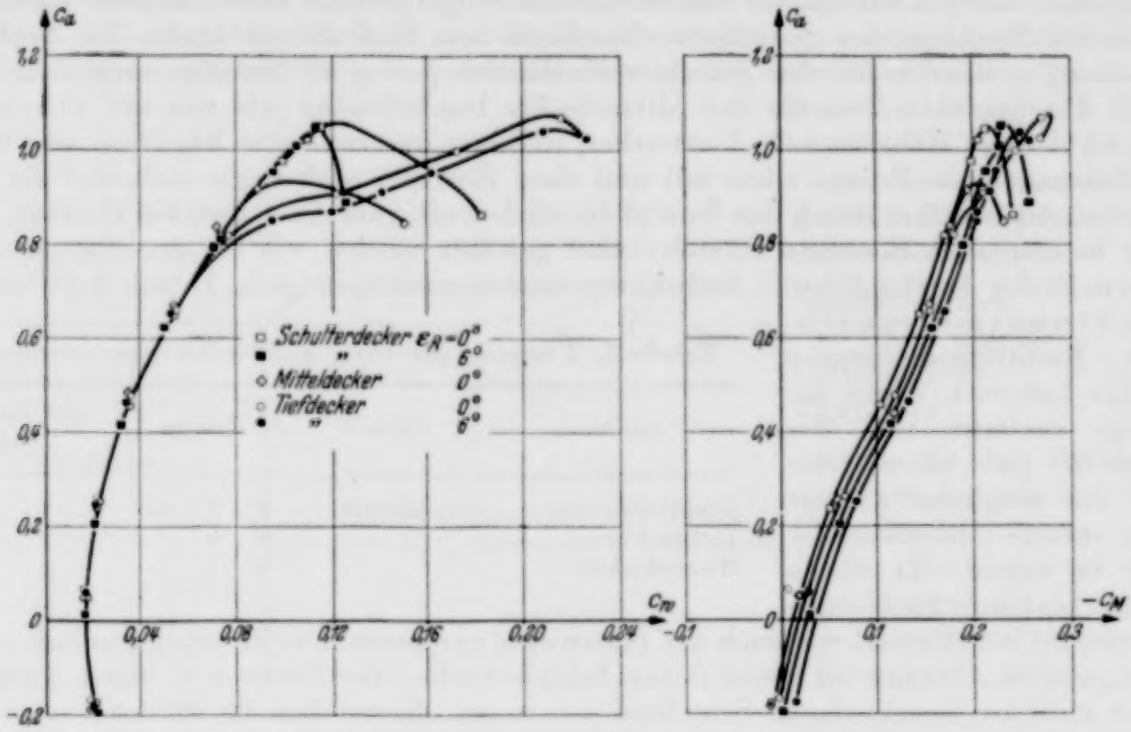



Abb. 16. Polaren und Momentenkurven der Gesamtmodelle.

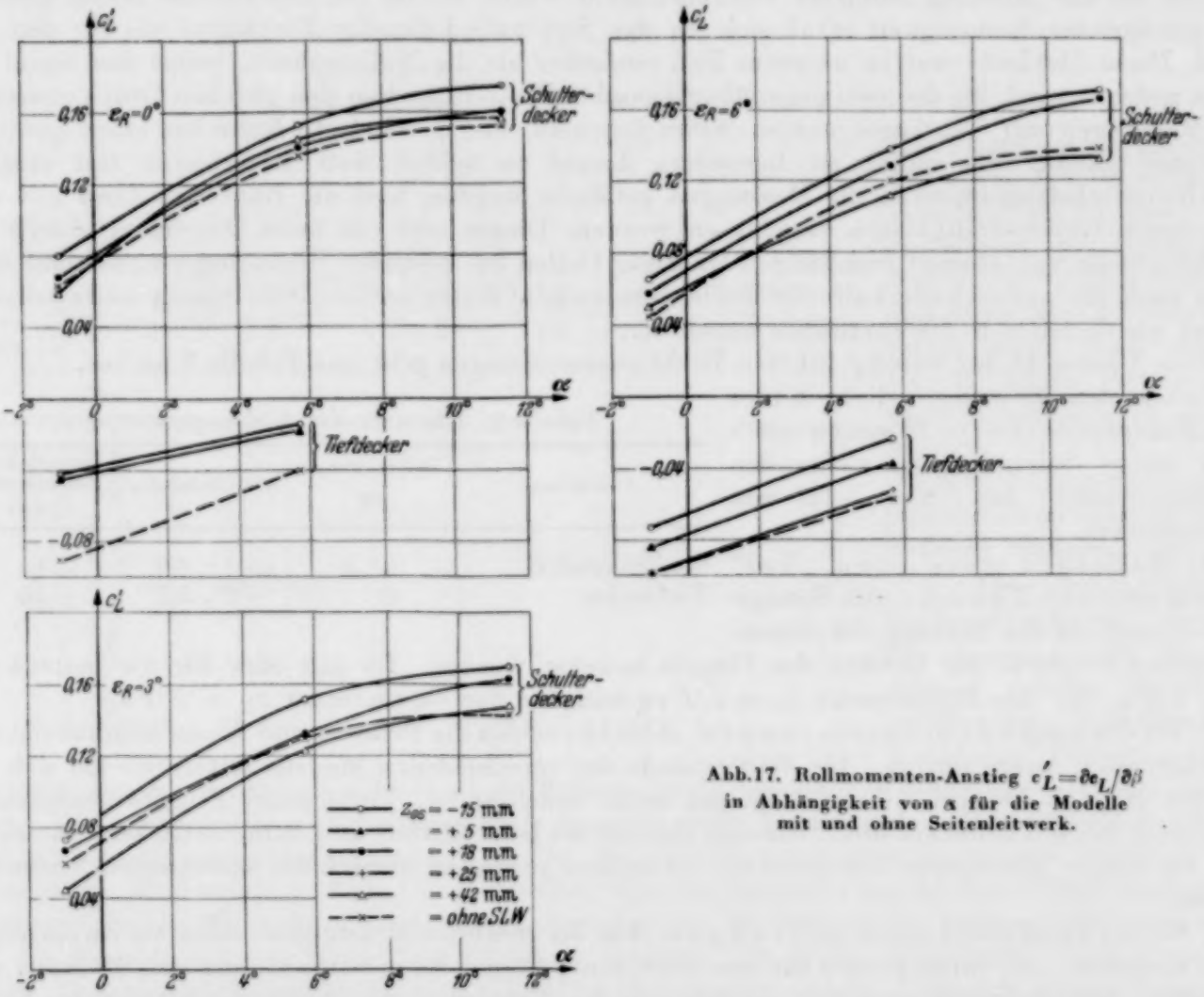



Abb. 17. Rollmomenten-Anstieg $c'_L = \partial c_L / \partial \beta$ in Abhängigkeit von $\alpha$ für die Modelle mit und ohne Seitenleitwerk.

Das Schieberollmoment einer Flügel-Rumpf-Anordnung ist stark abhängig von der Hochlage des Flügels zum Rumpf (Abb. 17). Beim Schulterdecker ist dieses zusätzliche Rollmoment positiv, beim Tiefdecker negativ und beim Mitteldecker null. Es läßt sich gut vorausberechnen,

wie frühere Arbeiten zeigen [1]. Beim Gesamtmodell mit Seitenleitwerk wird das Rollmoment natürlich noch durch das Seitenleitwerk beeinflußt. Es kommt hierbei auf die Hochlage des

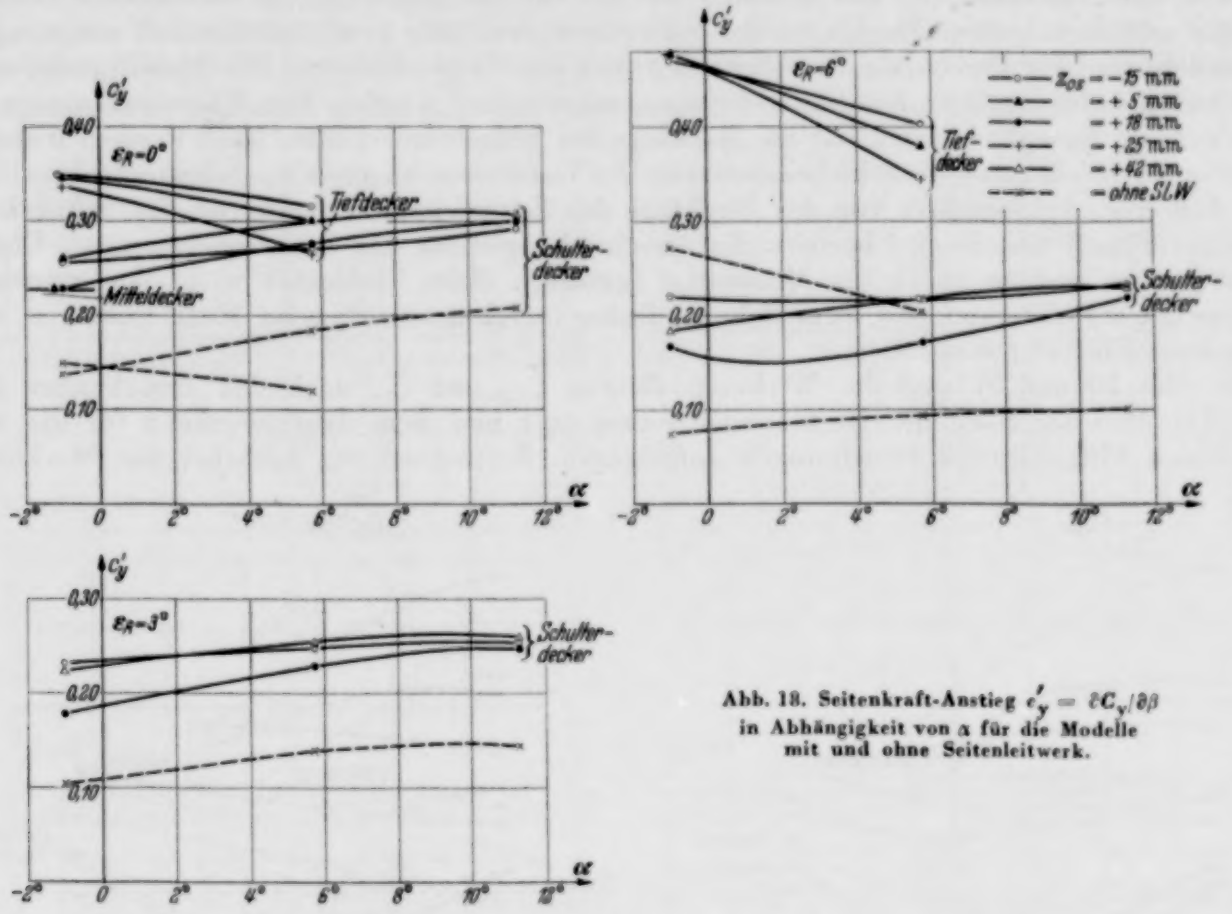



Abb. 18. Seitenkraft-Anstieg $c'_y = \partial C_y/\partial\beta$ in Abhängigkeit von α für die Modelle mit und ohne Seitenleitwerk.

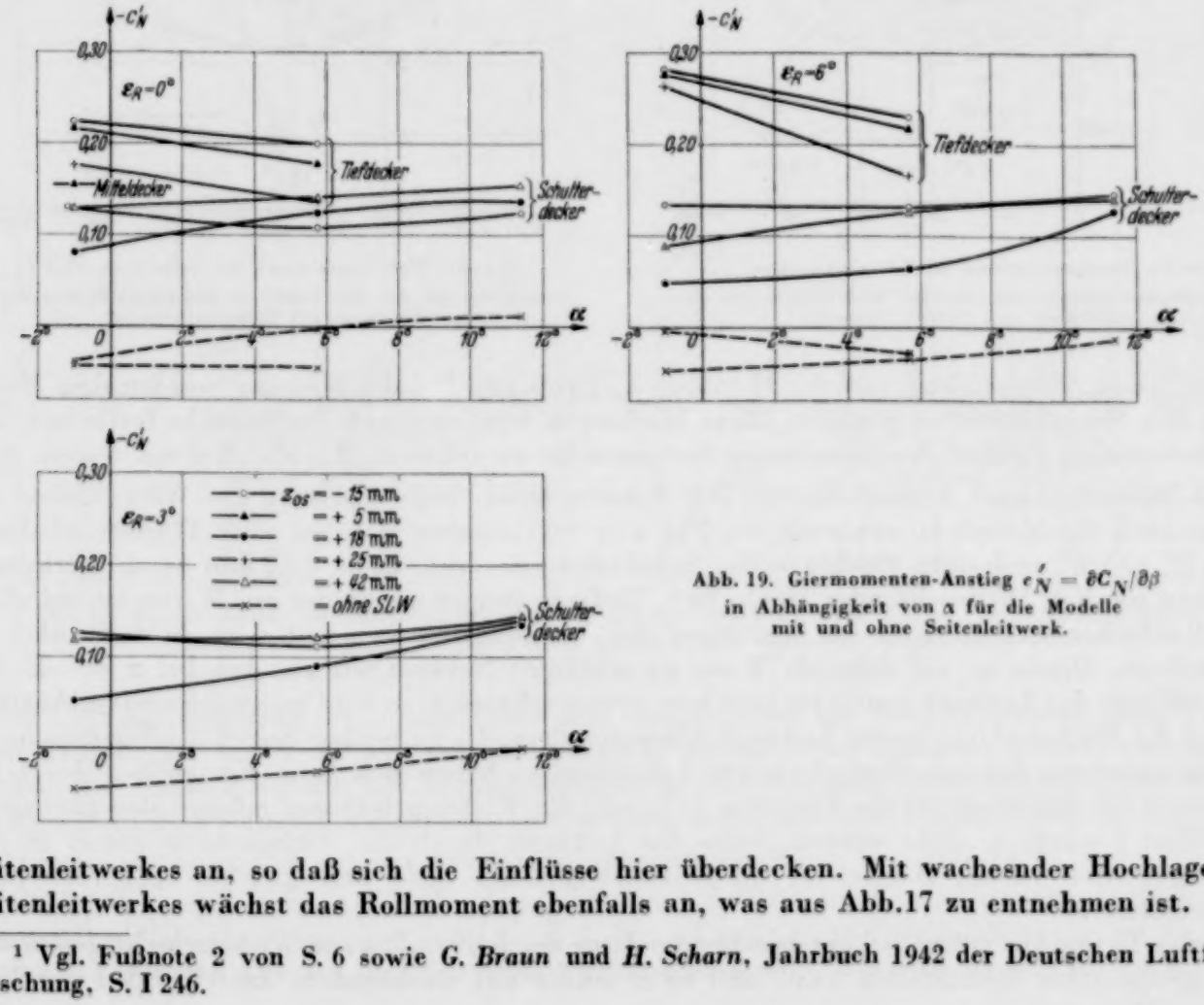



Abb. 19. Giermomenten-Anstieg $c'_N = \partial C_N/\partial\beta$ in Abhängigkeit von α für die Modelle mit und ohne Seitenleitwerk.

Seitenleitwerkes an, so daß sich die Einflüsse hier überdecken. Mit wachesnder Hochlage des Seitenleitwerkes wächst das Rollmoment ebenfalls an, was aus Abb.17 zu entnehmen ist.

[1] Vgl. Fußnote 2 von S. 6 sowie *G. Braun* und *H. Scharn*, Jahrbuch 1942 der Deutschen Luftfahrtforschung, S. I 246.

Die Schiebe-Seitenkraft und das Schiebe-Giermoment wollen wir genauer betrachten, da hierauf der induzierte Seitenwind von großem Einfluß ist. In Abb. 18 sind die Stabilitätsbeiwerte der Seitenkraft ($c_y'$) und in Abb. 19 die des Giermomentes ($c_N'$) für verschiedene Schränkungen und verschiedene Hochlagen des Seitenleitwerkes über dem Anstellwinkel aufgetragen. Außerdem sind die Ergebnisse ohne Seitenleitwerk mit darin enthalten. Die Stabilitätsbeiwerte sind auf das flugzeugfeste Koordinatensystem umgerechnet worden. Der Koordinatenursprung liegt auf der Rumpfachse und hat die Rücklage der Flügelvorderkante. Nach unseren früheren Überlegungen folgt, daß die Schiebeseitenkraft des Tiefdeckers über der des Schulterdeckers liegt, und daß eine Abhängigkeit von der Hochlage des Seitenleitwerkes und von der Schränkung zwischen Flügel und Rumpf besteht. Entsprechendes gilt für das Schiebegiermoment. Unsere Überlegungen werden durch die Messungen bestätigt. Beim Tiefdecker wirkt der induzierte Seitenwind stabilisierend und beim Schulterdecker instabilisierend; beim Mitteldecker ist kein besonderer Einfluß festzustellen.

In Abb. 20 und 21 sind die Wirkungsfaktoren $\bar{\zeta}_{SN}$ und $\bar{\zeta}_{Sy}$ nach den Beziehungen (21) und (22) über der Hochlage des Seitenleitwerkes ($z_{0S}$) und dem Anstellwinkel $\alpha$ für die verschiedenen Flügel-Rumpf-Anordnungen aufgetragen. Betrachten wir zunächst den Wirkungs-

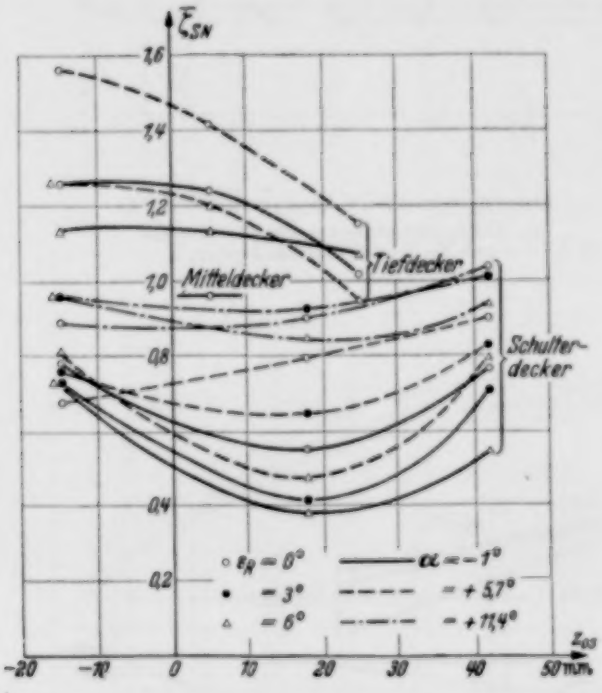



Abb. 20. Wirkungsfaktoren des Seitenleitwerkes $\bar{\zeta}_{SN}$ gebildet aus dem Giermoment in Abhängigkeit von der Hochlage des Seitenleitwerkes.

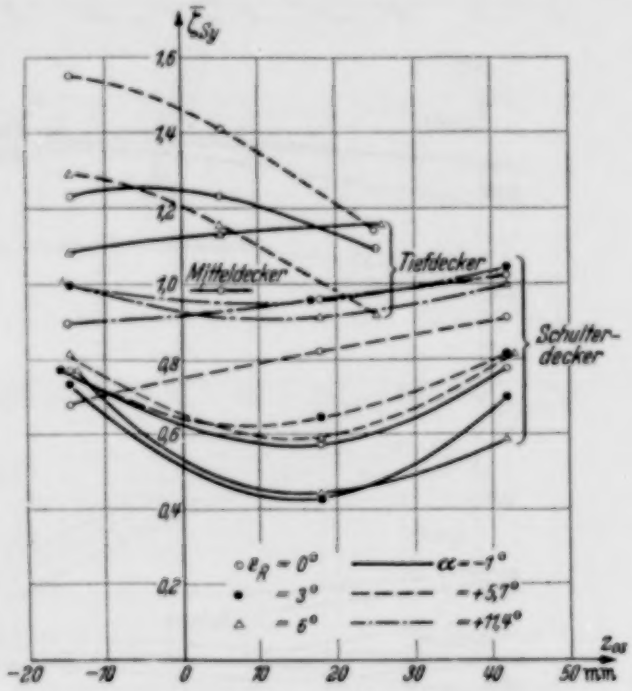



Abb. 21. Wirkungsfaktoren des Seitenleitwerkes $\bar{\zeta}_{Sy}$ gebildet aus der Seitenkraft in Abhängigkeit von der Hochlage des Seitenleitwerkes.

faktor $\bar{\zeta}_{SN}$ in Abhängigkeit von der Hochlage $z_{0S}$ (Abb. 20). Bei der Messung wurden drei Hochlagen des Seitenleitwerkes gewählt. Diese Hochlagen wurden durch Vorversuche festgelegt, um den maximalen Einfluß des induzierten Seitenwindes zu erfassen. Wie die Kurven zeigen, tritt dieses Maximum auch deutlich hervor. Der Schulterdecker zeigt durchweg $\bar{\zeta}_{SN}$-Werte kleiner als 1, wie auch theoretisch zu erwarten ist. Für $\alpha = -1°$ ergeben sich bei einer Flügelschränkung $\varepsilon_R = 3°$ und $6°$ und einer Hochlage des Seitenleitwerkes von $z_{0S} = +20$ mm sogar Wirkungsfaktoren um 0,4. Mit wachsender Hoch- bzw. Tieflage steigen sie wieder an. Weiter ist bei allen Schulterdecker-Anordnungen ein Ansteigen der Wirkungsfaktoren mit dem Anstellwinkel zu beobachten. Dieses ist auf folgende Weise zu erklären: Nehmen wir an, daß bei $\alpha = -1°$ die Wirbelfläche das Leitwerk unten berührt bzw. etwas schneidet, so wird mit wachsendem Anstellwinkel die Wirbelschicht in das Leitwerk hineinwandern. Da zu beiden Seiten der Wirbelschicht entgegengesetzte Seitengeschwindigkeiten herrschen, so heben sich beim Eintauchen des Leitwerkes in die Wirbelschicht die Einflüsse z. T. auf; die Wirkungsfaktoren müssen also ansteigen. Der Wert 1 würde erreicht werden, wenn das Leitwerk durch die Wirbelschicht genau in der Mitte getroffen würde. Hierbei ist ein Leitwerk gleicher Tiefe und gleicher $c_{a\,\text{örtl}}$-Verteilung vorausgesetzt.

Beim Tiefdecker müßte bei entsprechender Lage des Leitwerkes zur Wirbelschicht genau das Entgegengesetzte festzustellen sein, und zwar müßte mit wachsendem Anstellwinkel der Wir-

kungsfaktor von einem Wert größer als 1 an abnahmen. Diese Abnahme ist bei den Messungen nicht aufgetreten. Dieses rührt wohl daher, daß die Wirbelschicht bei $\alpha = -1°$ noch etwas unterhalb des Leitwerkes lag, so daß mit wachsendem Anstellwinkel zunächst noch eine Zunahme eintreten muß. Erst mit größeren Anstellwinkeln müßte dann die Abnahme erfolgen. Von der Schränkung ist der Wirkungsfaktor natürlich aus den gleichen Gründen ebenfalls abhängig. Als maximaler Wert $\overline{\zeta}_{s_N}$ ergibt sich beim Tiefdecker mit $\varepsilon_R = 0°$ und $\alpha = 5{,}7°$ der Wert 1,56. Dieser

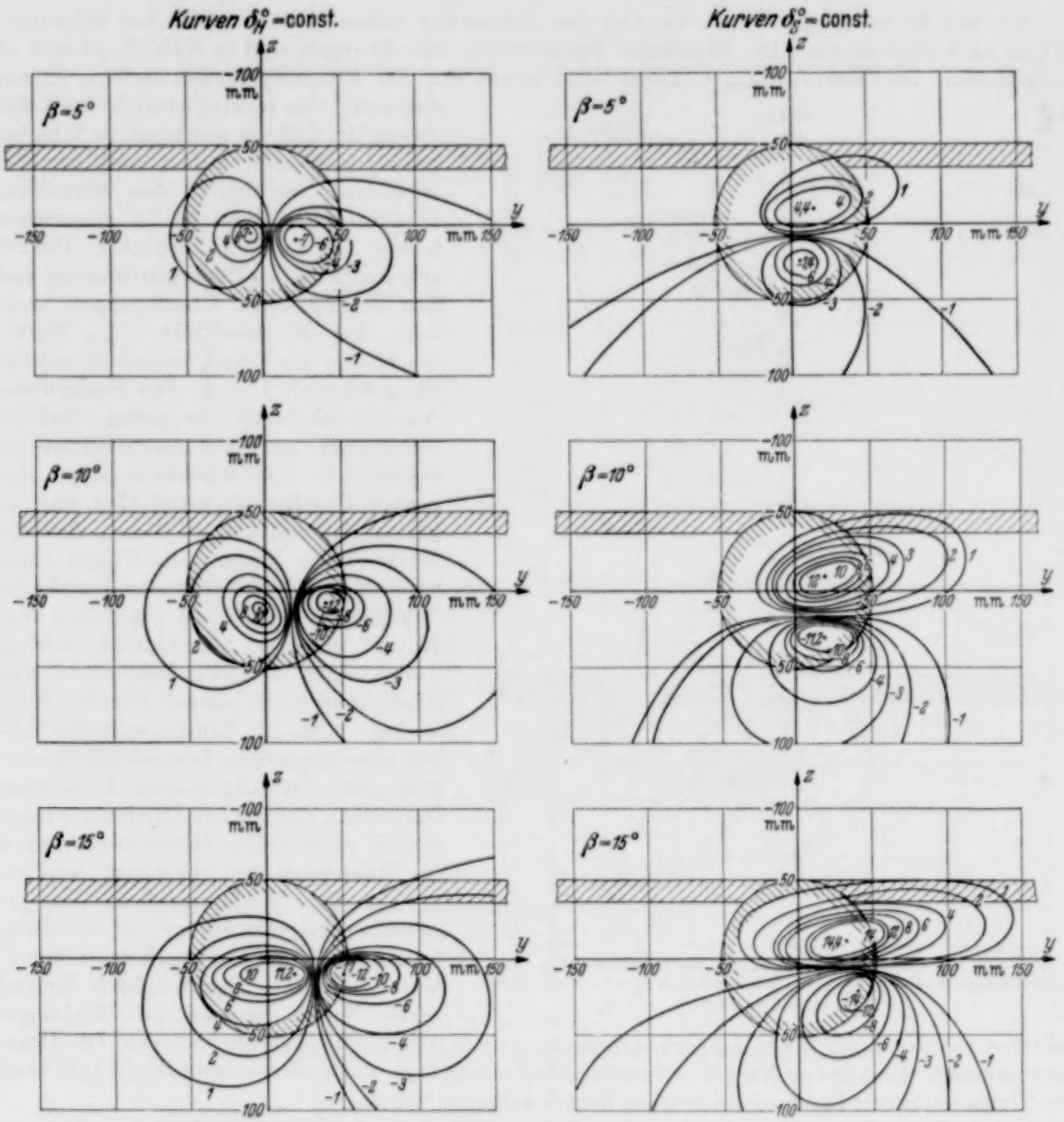



Abb. 22. Kurven gleichen Abwindes ($\delta_H$ = konst.) und gleichen Seitenwindes ($\delta_S$ = konst.) aus Richtungsmessungen hinter dem Schulterdecker bei verschiedenen Schiebewinkeln. $\varepsilon_R = 0°$, $\alpha = -1°$, $x = -10$ mm.

Wert liegt also ungefähr soviel über 1 wie der kleinste Wert des Schulterdeckers unter 1. Für den Mitteldecker liefert die Messung fast genau 1, wie nach der Theorie zu erwarten war. Es wurde der Mitteldecker mit der Schränkung $\varepsilon_R = 0°$ nur bei einem Anstellwinkel vermessen, da größere Einflüsse vermutlich nicht auftreten werden. Ganz ähnliches Verhalten wie die Wirkungsfaktoren $\overline{\zeta}_{SN}$ zeigen die aus der Seitenkraft abgeleiteten Werte $\overline{\zeta}_{Sy}$, Abb. 21.

3. Richtungsmessungen. Im Anschluß an die Sechskomponentenmessungen wurden umfangreiche Richtungsmessungen durchgeführt, deren Umfang aus Tabelle 2 hervorgeht. Es wurde dabei das gesamte Abwind- und Seitenwindfeld ausgemessen. Es wurden jeweils für die Schiebe-

winkel $\beta = 5°$, $10°$ und $15°$ die Kurven konstanten Abwindes ($\delta_H$) und konstanten Seitenwindes ($\delta_S$) in dem flugzeugfesten Koordinatensystem bestimmt (Abb. 14).

Wir verzichten darauf, hier sämtliche Meßergebnisse wiederzugeben. Als Beispiel einer vollständigen Messung haben wir in Abb.22 die Verhältnisse für den Schulterdecker mit der Schränkung $\varepsilon_R = 0°$ bei dem Anstellwinkel $\alpha = -1°$ dargestellt. Für die anderen Anordnungen sehen die Kurven ähnlich aus. Die Kurven gleichen Ab- bzw. Aufwindes sind um $90°$ gegenüber den Kurven gleichen Seitenwindes gedreht.

Aus den Richtungsmessungen am Ort des Leitwerkes haben wir den örtlichen Wirkungsfaktor nach (6) bestimmt. Die Ergebnisse für sämtliche Anordnungen sind in Abb.23, 24 und 25 aufgetragen. Die Kurven $\zeta_{S\,örtl.} = \text{konst.}$ sind etwas aus der Flugzeugsymmetrieebene heraus versetzt, was wahrscheinlich die Folge davon ist, daß wir nur positive Schiebewinkel gemessen haben und zur Bestimmung von $\partial\delta_S/\partial\beta$ den Mittelwert zwischen $\beta = 0°$ und $\beta = 10°$ genommen haben. Für den Schulterdecker, Abb.23, ergeben sich in Übereinstimmung mit den theoretischen Überlegungen oberhalb der Wirbelschicht $\zeta_{S\,örtl.}$-Werte, die kleiner als 1 sind, unterhalb solche, die größer als 1 sind. Der Einfluß des Anstellwinkels ist nur gering. Daß die theoretisch mit dem Anstellwinkel zu erwartende Aufwärtsbewegung des ganzen Geschwindigkeitsfeldes nur so gering ist, rührt wohl daher, daß die Wirbelfläche hinter dem Flügel stark vom Rumpf geführt wird. Durch die Schränkung des Flügels gegenüber dem Rumpf um $\varepsilon_R = 6°$, Abb. 24, erfährt das gesamte Geschwindigkeitsfeld eine Absenkung nach unten. Für den Tiefdecker, Abb. 25, kehren sich die Verhältnisse gegenüber dem Schulterdecker etwa um. Im allgemeinen kann man feststellen, daß die im Abschnitt 3 theoretisch abgeleiteten Beziehungen durch die Messungen gut bestätigt werden.

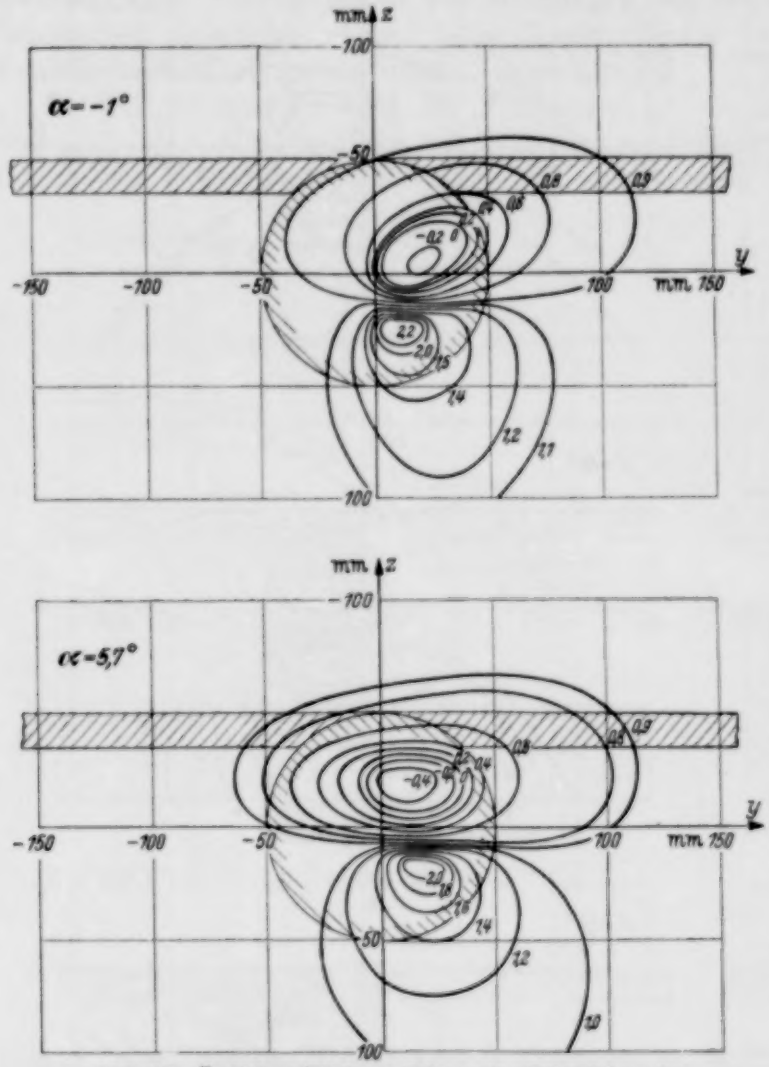



Abb. 23. Örtlicher Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes aus Richtungsmessungen hinter dem Schulterdecker. $\varepsilon_R = 0°$, $x = -10$ mm. $\alpha = -1°$ ($c_a \approx 0$) und $\alpha = 5{,}7°$ ($c_a \approx 0{,}5$).

Um den Wirkungsfaktor des gesamten Seitenleitwerkes zu erhalten, ist nach (17) ein entsprechender Mittelwert zu bilden. Der Vergleich der auf diese Weise berechneten Wirkungsfaktoren mit denen der Sechskomponentenmessung ist in Abb.26 durchgeführt worden. Die Übereinstimmung ist einigermaßen gut. Sie würde besser werden, wenn man entsprechend (18) noch die Tiefenverteilung des Seitenleitwerkes berücksichtigen würde.

In Abb.27 haben wir noch aus den Ergebnissen der theoretischen Rechnungen des Abschnittes **3** die Wirkungsfaktoren für die gemessenen Modelle ermittelt. Die dargestellten Kurven sind mit denen aus Abb.20, 21 und 26 zu vergleichen. Die Übereinstimmung ist wieder einigermaßen gut. Nach den Messungen sind die durch den induzierten Seitenwind hervorgerufenen Stabilitätsänderungen stärker als nach der Theorie. Die Abhängigkeit vom Anstellwinkel kommt nach den Messungen wesentlich schwächer heraus als nach der Theorie.

**5. Zusammenfassung.** Bei einem schiebenden Flugzeug wird durch die Verdrängungsströmung des Rumpfes eine antimetrische Auftriebsverteilung am Flügel erzeugt, die insbesondere für den Schulter- und Tiefdecker recht beträchtlich ist. Als Folge des sich hieraus am Tragflügel ausbildenden Druckgradienten in Querrichtung entsteht ein induzierter Seitenwind, der analog dem Abwind am Höhenleitwerk die Wirksamkeit des Seitenleitwerkes und damit die Richtungs-

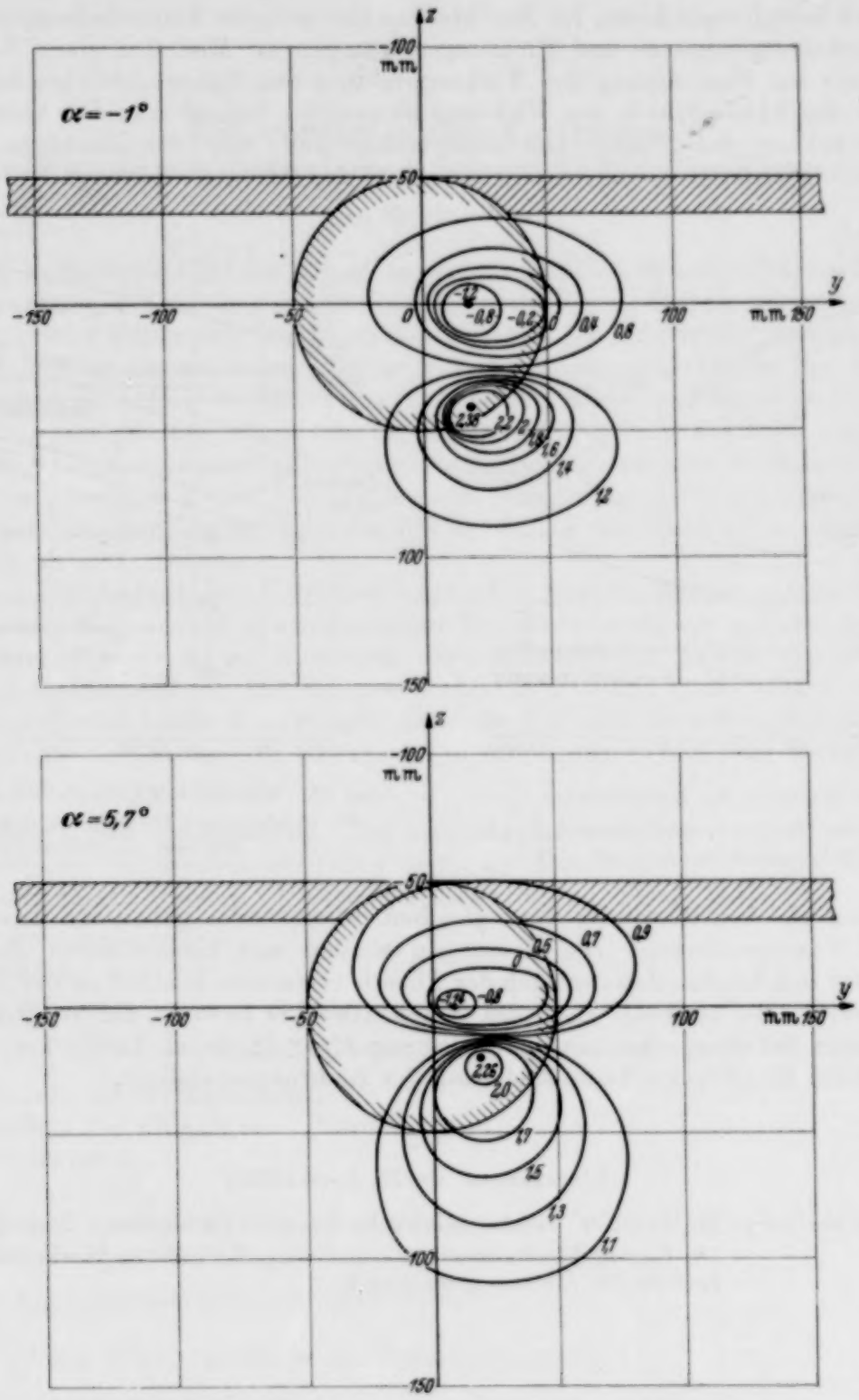



Abb. 2. Örtlicher Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes aus Richtungsmessungen hinter dem Schulterdecker. $\varepsilon_R = 6°$, $x = -10$ mm. $\alpha = -1°$ ($c_a \approx 0$) und $\alpha = 5{,}7°$ ($c_a \approx 0{,}5$).

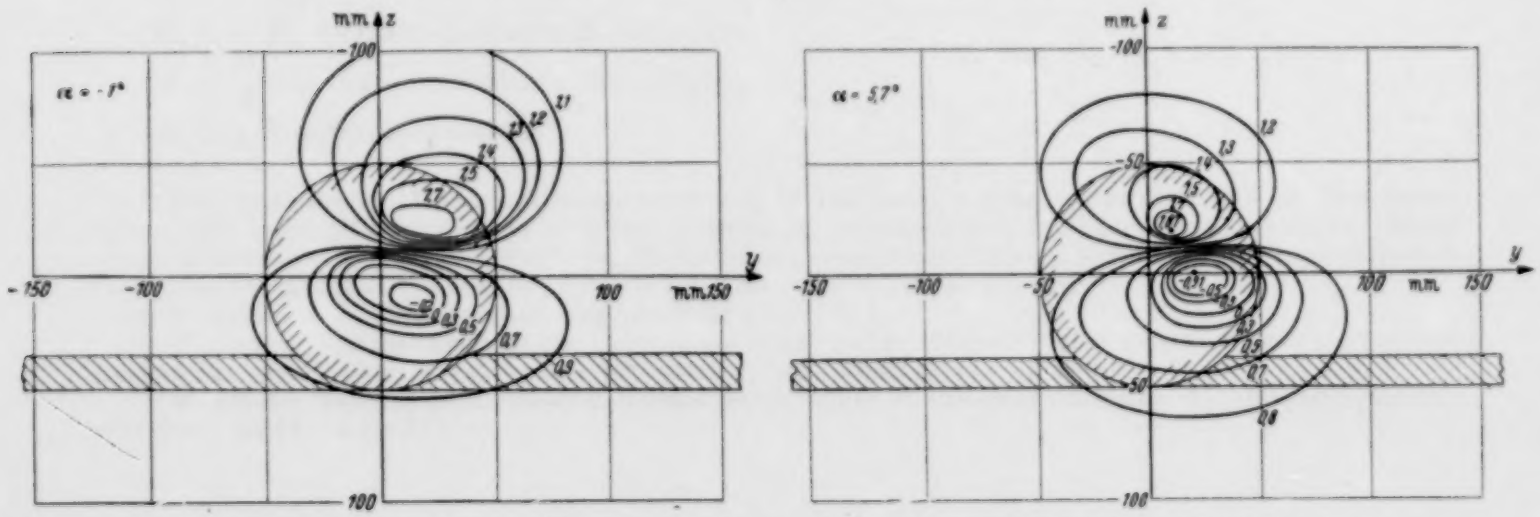



Abb. 25. Örtlicher Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes aus Richtungsmessungen hinter dem Tiefdecker. $\varepsilon_R = 0°$, $x = -10$ mm. $\alpha = -1°$ ($c_a \approx 0$) und $\alpha = 5{,}7°$ ($c_a \approx 0{,}5$).

stabilität stark beeinflussen kann. Im Anschluß an theoretische Untersuchungen wird über umfangreiche Sechskomponenten- und Richtungsmessungen an Modellen eines Schulter-, Mittel- und Tiefdeckers zur Bestimmung des Wirkungsfaktors des Seitenleitwerkes berichtet. Untersucht wurden die Abhängigkeit des Wirkungsfaktors des Seitenleitwerkes vom Anstellwinkel, von der Schränkung des Flügels zur Rumpfachse und von der Hochlage des Seitenleitwerkes. Bei den Richtungsmessungen wurde sowohl der Abwind wie auch der Seitenwind ge-

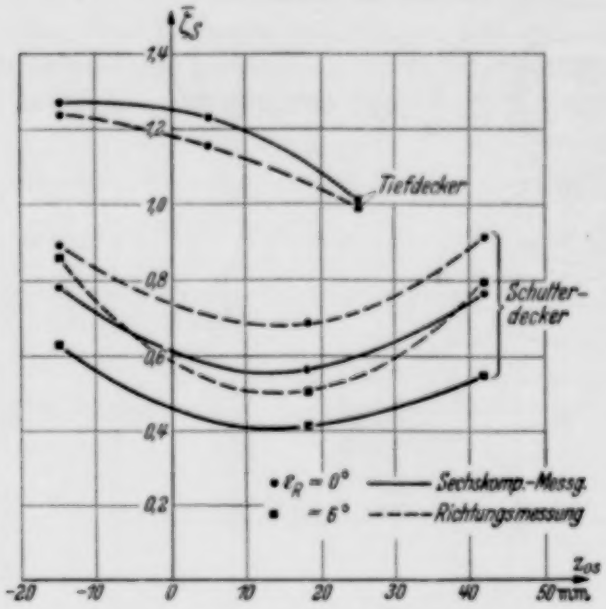



Abb. 26. Wirkungsfaktoren des Seitenleitwerkes $\bar{\zeta}_S$. Vergleich zwischen Sechskomponentenmessung ($\bar{\zeta}_{SN}$) und Richtungsmessung. $\Delta = -1°$.

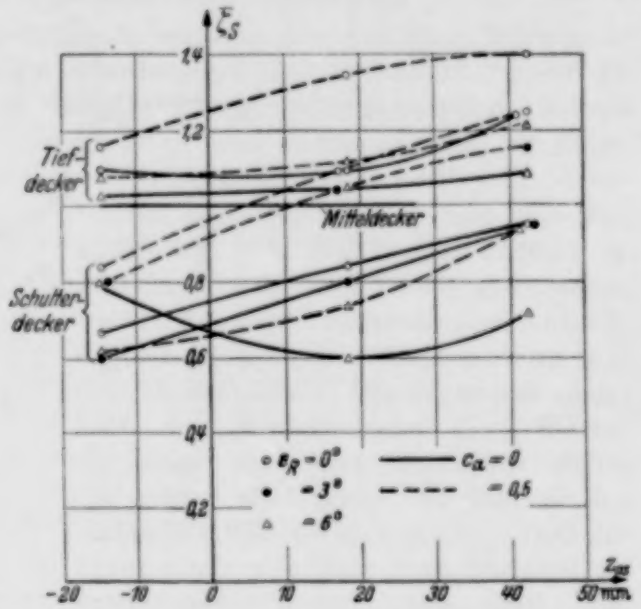



Abb. 27. Theoretische Wirkungsfaktoren des Seitenleitwerkes für Schulter- und Tiefdecker in Abhängigkeit von der Hochlage des Seitenleitwerkes.

messen. Kurven gleichen Abwindes bzw. gleichen Seitenwindes geben ein anschauliches Bild der gesamten Zusatzströmung. Die Messungen werden mit theoretischen Rechnungen verglichen. Es zeigt sich hierbei, daß der nach der Theorie erwartete Einfluß in den Messungen noch stärker hervortritt. Bei normaler Lage des Seitenleitwerkes bewirkt der zusätzliche induzierte Seitenwind beim Schulterdecker eine Erniedrigung ($\zeta_S < 1$), beim Tiefdecker eine Erhöhung ($\zeta_S > 1$) und beim Mitteldecker keine Änderung der Richtungsstabilität.

(Eingegangen am 25. April 1952.)

Anschriften der Verfasser: Dr. habil. *W. Jacobs*, Stockholm-Bromma (Schweden), Stora Mossens Backe 6.
Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, Braunschweig, Technische Hochschule, Institut für Strömungsmechanik.

# Ein vereinfachtes Verfahren zur Berechnung des induzierten Seitenwindes von Flugzeugen *.

Von W. Jacobs.

**1. Einleitung.** In der vorstehenden Arbeit[1] haben wir ausführlich über theoretische und experimentelle Untersuchungen über den induzierten Seitenwind von Flugzeugen berichtet. Hierbei ergab sich in gewissen Fällen ein beträchtlicher Einfluß des induzierten Seitenwindes auf die Wirksamkeit des Seitenleitwerkes, so daß er für die Richtungsstabilität des Flugzeuges erhebliche Bedeutung hat. Der Vergleich der Theorie mit Messungen hatte recht befriedigende Übereinstimmung gezeigt. Da jedoch die theoretische Ermittlung des Feldes der induzierten Seitenwindgeschwindigkeit in dem ganzen Leitwerksbereich bisher ziemlich umständlich ist — es muß für jeden einzelnen Punkt des Feldes ein Integral ausgewertet werden — erscheint es wünschenswert, das Rechenverfahren für die Ermittlung des Feldes des induzierten Seitenwindes erheblich zu vereinfachen.

Im folgenden soll deshalb ein Verfahren angegeben werden, das es gestattet, auf einfache Weise das Geschwindigkeitsfeld des induzierten Seitenwindes in der ganzen Querebene weit hinter dem Flügel ($x = -\infty$) zu berechnen. Wie man aus der Theorie des Abwindes weiß, ist das Geschwindigkeitsfeld am Ort des Leitwerkes ($x \approx -b/2$) nicht wesentlich verschieden von demjenigen sehr weit hinter dem Flügel. Dasselbe gilt auch für den induzierten Seitenwind, so daß die nachfolgende Theorie, die für $x = -\infty$ durchgeführt wird, die Verhältnisse am Ort des Leitwerkes gut wiedergeben dürfte.

**2. Bezeichnungen und Bezugsgrößen.** Das benutzte Achsensystem ($x$, $y$, $z$) ist identisch mit dem „experimentellen Achsensystem" ($x_e$; $y = y_e$; $z_e$). Der Index $e$ ist wegen der bequemeren Schreibweise fortgelassen worden. Ferner bedeuten:

$b = 2s$ die Flügelspannweite,
$l$ die Flügeltiefe,
$F$ die Flügelfläche,
$\xi = \frac{x}{s}$, $\eta = \frac{y}{s}$, $\zeta = \frac{z}{s}$ mit der Halbspannweite dimensionslos gemachte Koordinaten,
$\zeta_1$ die Hochlage der Wirbelschicht,
$z_0$ die Hochlage des Flügels zum Rumpf,
$\alpha$ den Anstellwinkel,
$\beta$ den Schiebewinkel,
$V$ die Fluggeschwindigkeit,
$v_x$, $v_y$, $v_z$ die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit,
$\delta_S = -\frac{v_y}{V}$ den induzierten Seitenwindwinkel,
$\zeta_S = 1 - \frac{\partial \delta_S}{\partial \beta}$ den Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes,
$\Gamma(\eta)$ die Zirkulationsverteilung,
$\gamma(\eta) = \frac{\Gamma}{b\,V}$ die dimensionslose Zirkulationsverteilung,
$K_1, \ldots K_6$ charakteristische Konstanten,
$\Lambda = \frac{b^2}{F}$ das Seitenverhältnis des Flügels,
$D$ den Rumpfdurchmesser.

---

* Die vorliegenden Untersuchungen wurden zum Teil bereits 1944 ausgeführt und in dem heute nicht mehr zugänglichen Bericht 45/5 des früheren Aerodynamischen Institutes der Technischen Hochschule Braunschweig (Leitung: Prof. Dr. *H. Schlichting*) mitgeteilt. In zwei Berichten des Flugtechnischen Institutes Stockholm-Ulvsunda [2, 3] wurden die Untersuchungen fortgeführt.

[1] *W. Jacobs* u. *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 21 (1953) S. 1.

[2] *W. Jacobs*, The influence of the induced sidewind on the efficiency of the vertical tail; a simplified method for calculation. Flygtekniska försöksanstalten, Medd. 35 (1950).

[3] *W. Jacobs*, The induced sidewind behind swept wings at subsonic velocities. Flygtekniska försöksanstalten, Medd. 41 (1951).

**3. Verfahren zur vereinfachten Berechnung des induzierten Seitenwindes.** Auf die physikalischen Grundlagen und die Entstehung des induzierten Seitenwindes soll hier nicht näher eingegangen werden. Dies ist ausführlich in der erwähnten früheren Arbeit geschehen. Es mag nur erwähnt werden, daß für gewisse Hochlagen des Flügels zum Rumpf beim Schieben solche zusätzlichen antisymmetrischen Auftriebsverteilungen erzeugt werden, die ihrerseits einen beträchtlichen Seitenwind induzieren. Dieser induzierte Seitenwind ist entgegengesetzt gleich in spiegelbildlich zur Wirbelfläche gelegenen Punkten. Da das induzierte Feld an die Wirbelfläche gebunden ist, kommt es bei der Beurteilung der Richtungsstabilität auf die Lage des Seitenleitwerkes relativ zur Wirbelfläche stark an. Der induzierte Seitenwind ist proportional dem Schiebewinkel $\beta$, er ist unabhängig vom Anstellwinkel $\alpha$.

Für den Einfluß des induzierten Seitenwindes auf das Seitenleitwerk wurde analog zum Abwindfaktor des Höhenleitwerkes ein Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes eingeführt von der Größe[1]

$$\zeta_S = 1 - \frac{\partial \delta_S}{\partial \beta} = 1 + \frac{1}{V}\frac{\partial v_y}{\partial \beta}. \tag{1}$$

Ferner wurde gezeigt, daß für große Abstände hinter dem Flügel der Einfluß der Schrägstellung des Wirbelbandes vernachlässigt werden kann. Wir rechnen also mit der Auftriebsverteilung des schiebenden Flügels, nehmen aber ein zur Symmetrieebene paralleles Wirbelsystem an. Durch Zerlegung der Zirkulation in einen bei Geradanströmung vorhandenen Anteil $\gamma_\varrho(\eta)$ und einen vom Schieben herrührenden zusätzlichen Anteil[2] $\beta\,\gamma_\beta(\eta)$ in der Form

$$\gamma(\eta) = \gamma_\varrho(\eta) + \beta\,\gamma_\beta(\eta), \tag{2}$$

hatte sich für den örtlichen Wirkungsfaktor ergeben[3]

$$\zeta_{S\,\text{örtl}}(\eta, \zeta - \zeta_1) = 1 + \frac{2(\zeta - \zeta_1)}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\eta - \eta'}{[(\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta_1)^2]^2}\,\gamma_\beta(\eta')\,d\eta'. \tag{3}$$

Die Auswertung dieses Integrales ist in jedem Einzelfall nur durch mühsame numerische oder graphische Integration möglich. Um diese mühsame Auswertung zu vermeiden, wollen wir die antisymmetrische Auftriebsverteilung $\gamma_\beta(\eta)$ durch eine Summe von Polynomen darstellen und für die letzteren die Auswertung des Integrales (3) ein für allemal ausführen. Die meisten praktisch vorkommenden antisymmetrischen Auftriebsverteilungen lassen sich durch die folgende Polynom-Summe darstellen:

$$\gamma_\beta(\eta) = \sum_{n=1}^{6} K_n\, f_n(\eta) \qquad (-1 \leq \eta \leq +1). \tag{4}$$

Die $K_n$ sind freie Konstanten, die für jede Auftriebsverteilung passend zu wählen sind. Die Polynome $f_n(\eta)$ müssen in der Mitte und am Flügelende verschwinden, $f_n(0) = 0$, $f_n(\pm 1) = 0$. Es wurden für die Polynome $f_n(\eta)$ die folgenden Ansätze gewählt:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\eta) &= \eta(1 - |\eta|)^5, \\ f_2(\eta) &= \eta\,|\eta|\,(1 - |\eta|)^4, \\ f_3(\eta) &= \eta^3(1 - |\eta|)^3, \\ f_4(\eta) &= \eta(1 - |\eta|), \\ f_5(\eta) &= \eta\,|\eta|\,(1 - |\eta|), \\ f_6(\eta) &= \eta^3(1 - |\eta|). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Diese Funktionen sind in Abb. 1 und 2 dargestellt.

Für den örtlichen Wirkungsfaktor erhält man dann nach Auswertung des Integrales in (3)

$$\zeta_{S\,\text{örtl}}(\eta, \zeta - \zeta_1) = 1 - \sum_{n=1}^{6} K_n\, F_n(\eta, \zeta - \zeta_1). \tag{6}$$

---

[1] Vgl. Gl. (6) der in Fußnote [1] von S. 23 zitierten Arbeit.
[2] Ebenda Gl. (9).
[3] Ebenda Gl. (16).

Hierbei bedeutet

$$F_n(\eta, \zeta - \zeta_1) = -\frac{2(\zeta - \zeta_1)}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta - \eta'}{[(\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta_1)^2]^2} f_n(\eta')\, d\eta' \,. \tag{7}$$

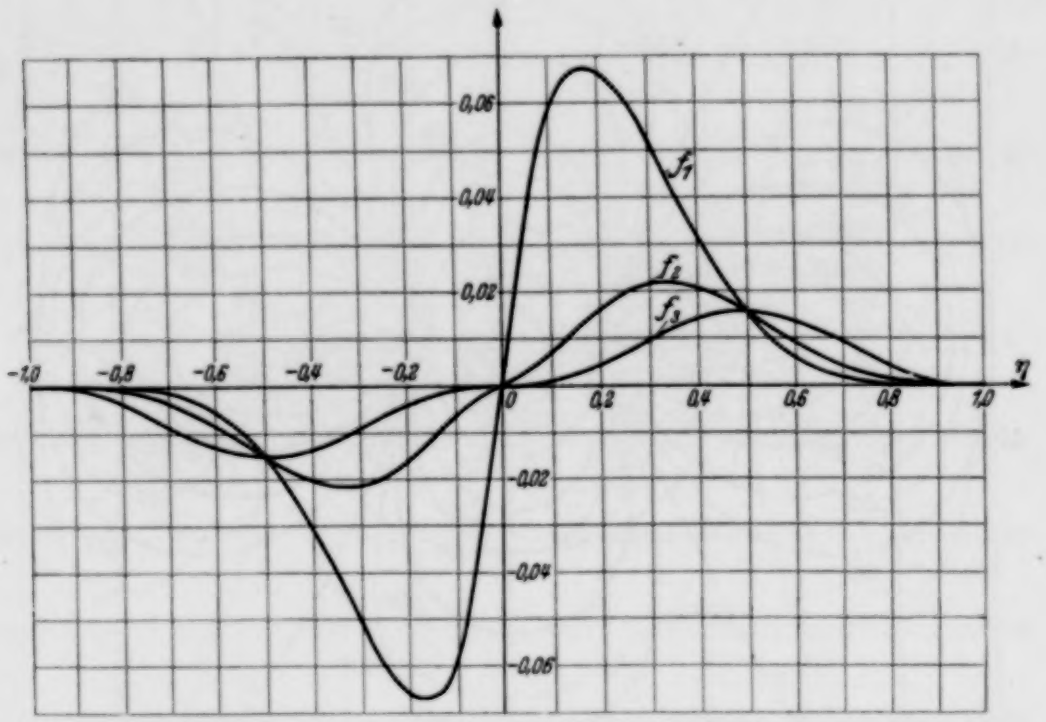



Abb. 1. Die Näherungspolynome $f_1$, $f_2$, $f_3$ für antisymmetrische Auftriebsverteilungen, Gleichung (5).

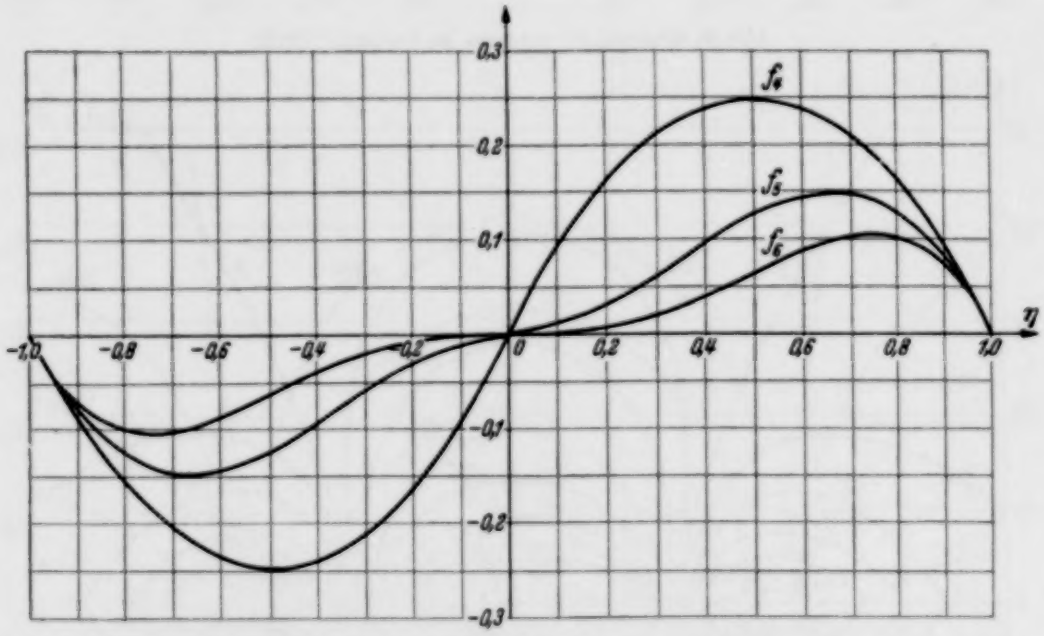



Abb. 2. Die Näherungspolynome $f_4$, $f_5$, $f_6$ für antisymmetrische Auftriebsverteilungen, Gleichung (5).

Wir bezeichnen diese Funktionen $F_n$ als Einflußfunktionen der Grundpolynome $f_n$. Diese Einflußfunktionen sind allgemein gültig. Zur Ermittlung des induzierten Seitenwindes brauchen wir diese Funktionen $F_n$ nur mit den entsprechenden Konstanten $K_n$ zu multiplizieren, die für eine bestimmte antisymmetrische Auftriebsverteilung durch das Näherungspolynom (4) gegeben werden. Im allgemeinen genügt es, nur drei der Grundpolynome für die Approximation zu verwenden. Handelt es sich um antisymmetrische Auftriebsverteilungen mit einem ausgeprägten Maximum im inneren Teil des Flügels (Rumpfeinfluß), so können die ersten drei Polynome $f_1$, $f_2$, $f_3$ herangezogen werden; liegt das Maximum weiter außerhalb (z. B. Querruderausschlag), so werden die Polynome $f_4$, $f_5$, $f_6$ in den meisten Fällen eine gute Näherung liefern.

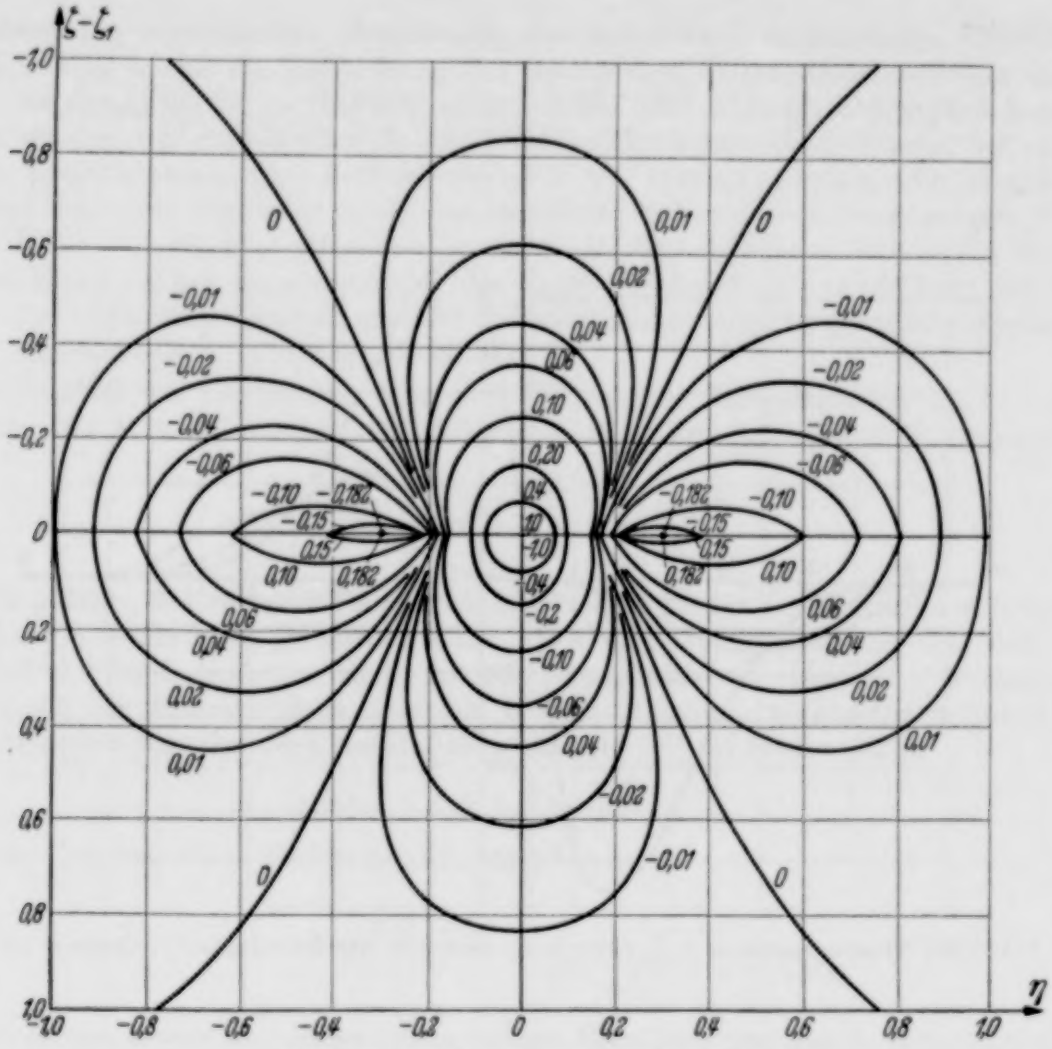



Abb. 3. Kurven $F_1$ = konst. in der $(\eta, \zeta)$-Ebene.

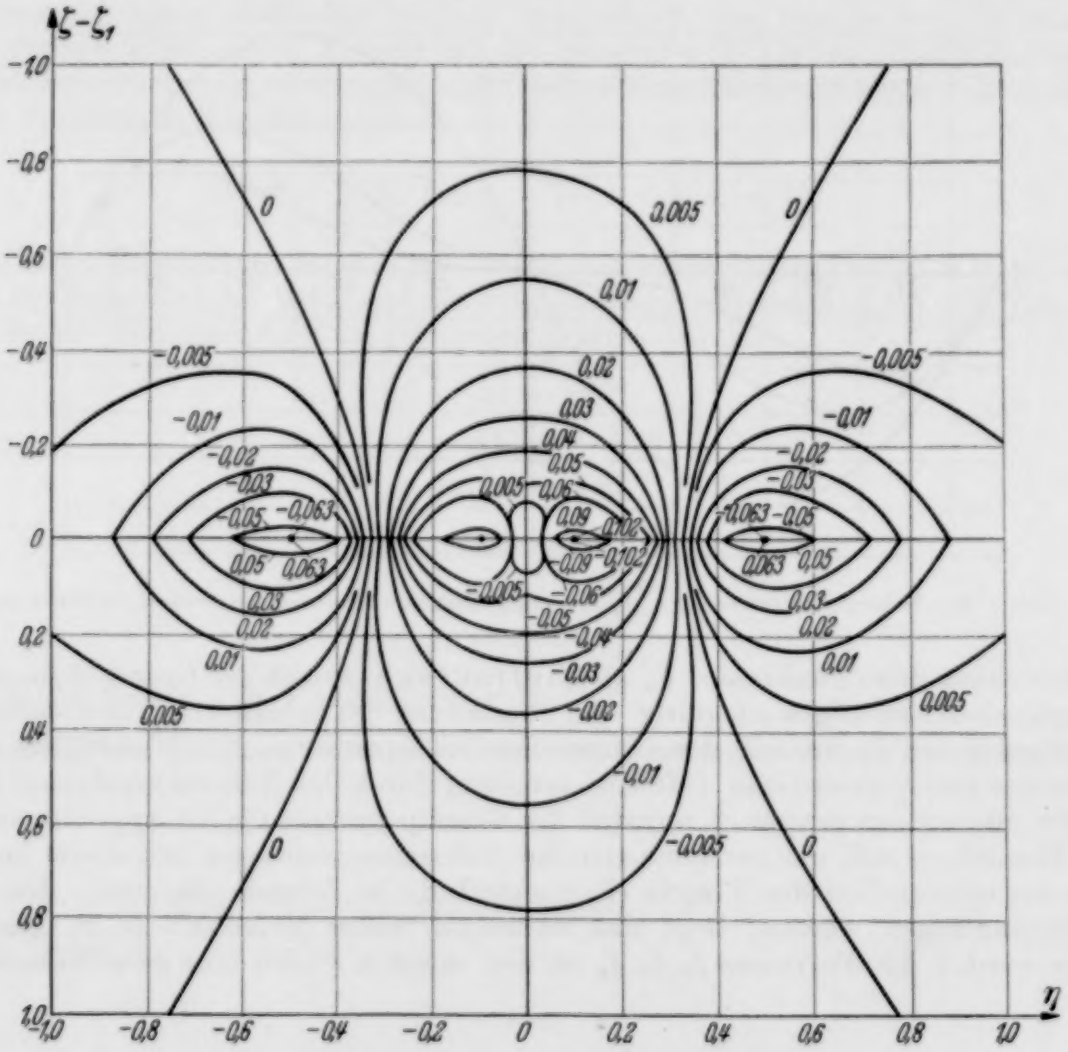



Abb. 4. Kurven $F_2$ = konst. in der $(\eta, \zeta)$-Ebene.

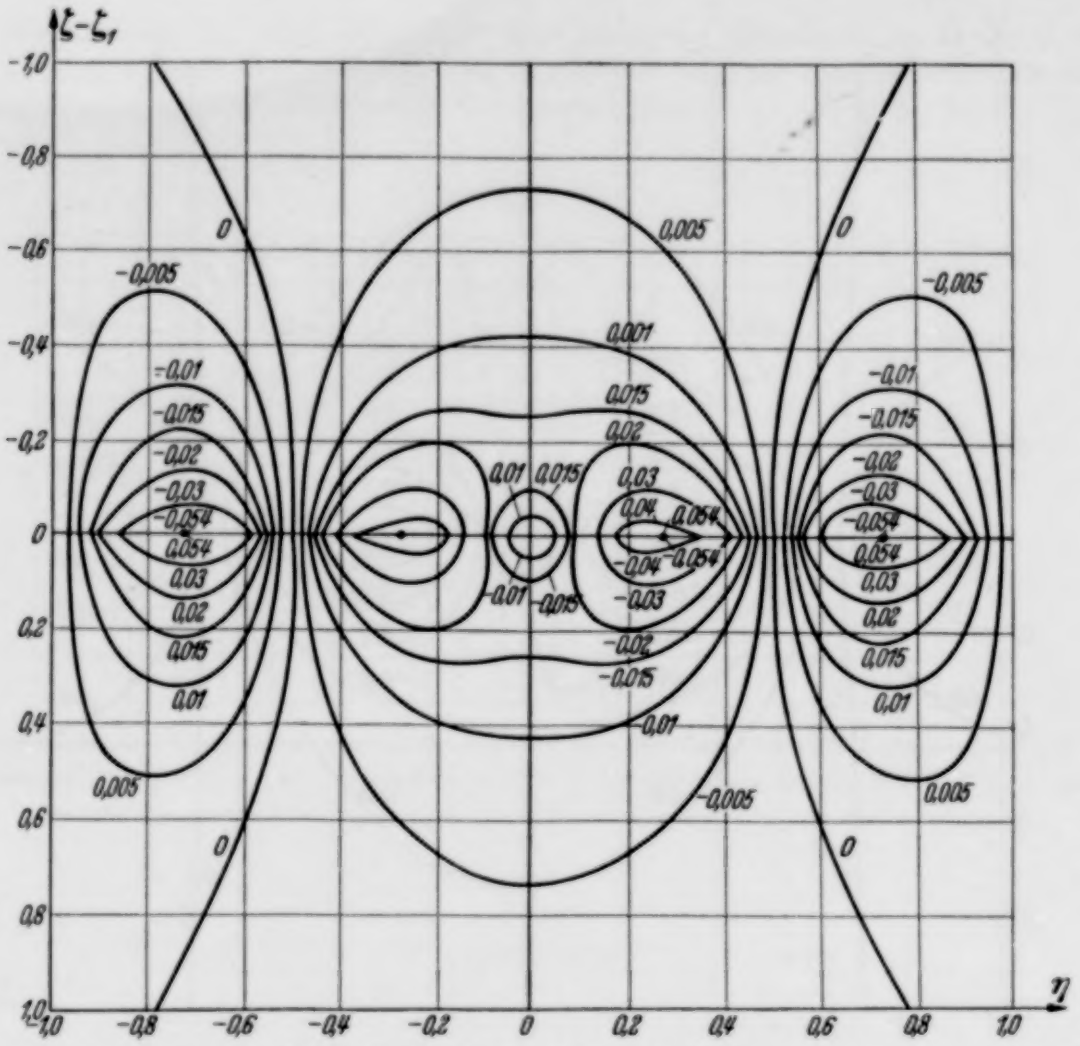



Abb. 5. Kurven $F_3$ = konst. in der $(\eta, \zeta)$-Ebene.

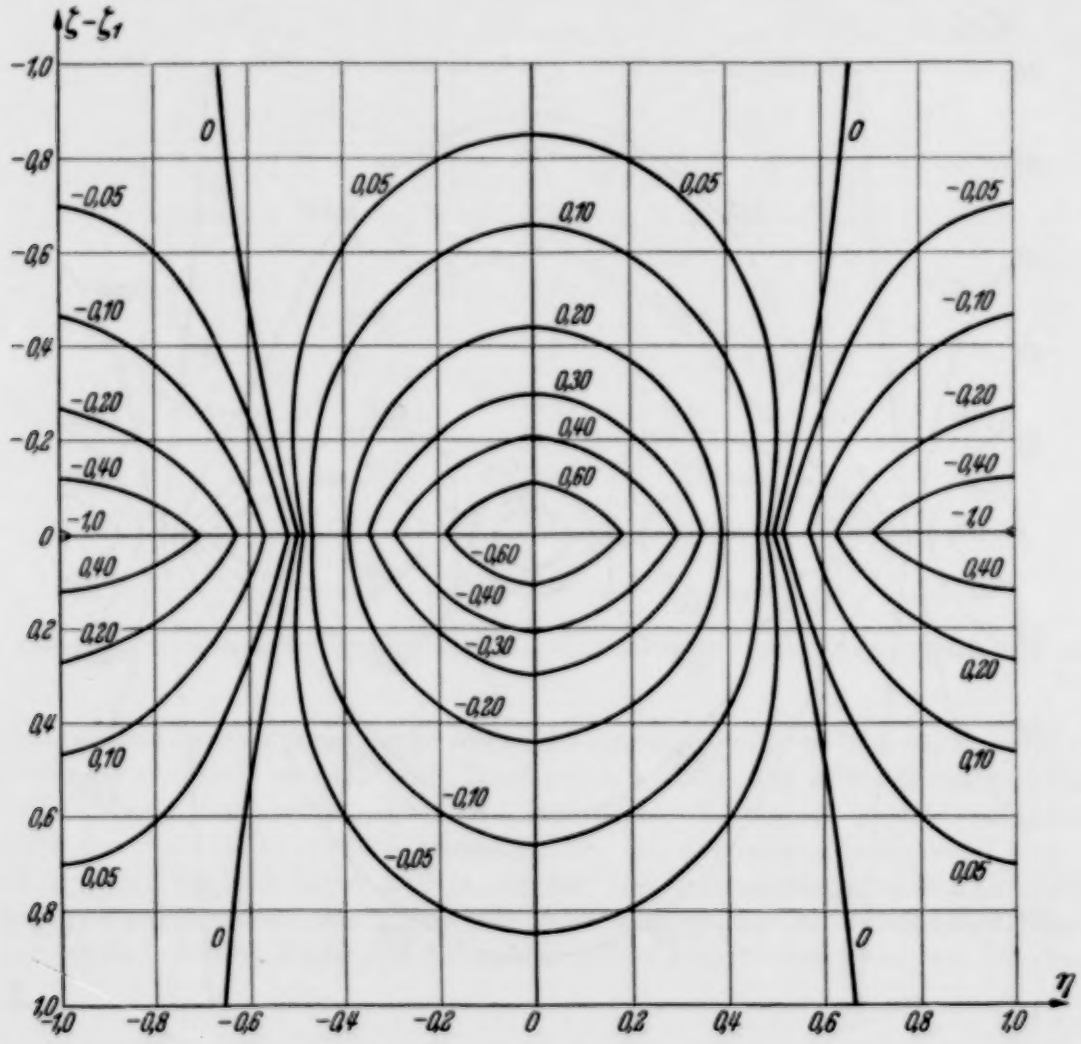



Abb. 6. Kurven $F_4$ = konst. in der $(\eta, \zeta)$-Ebene.

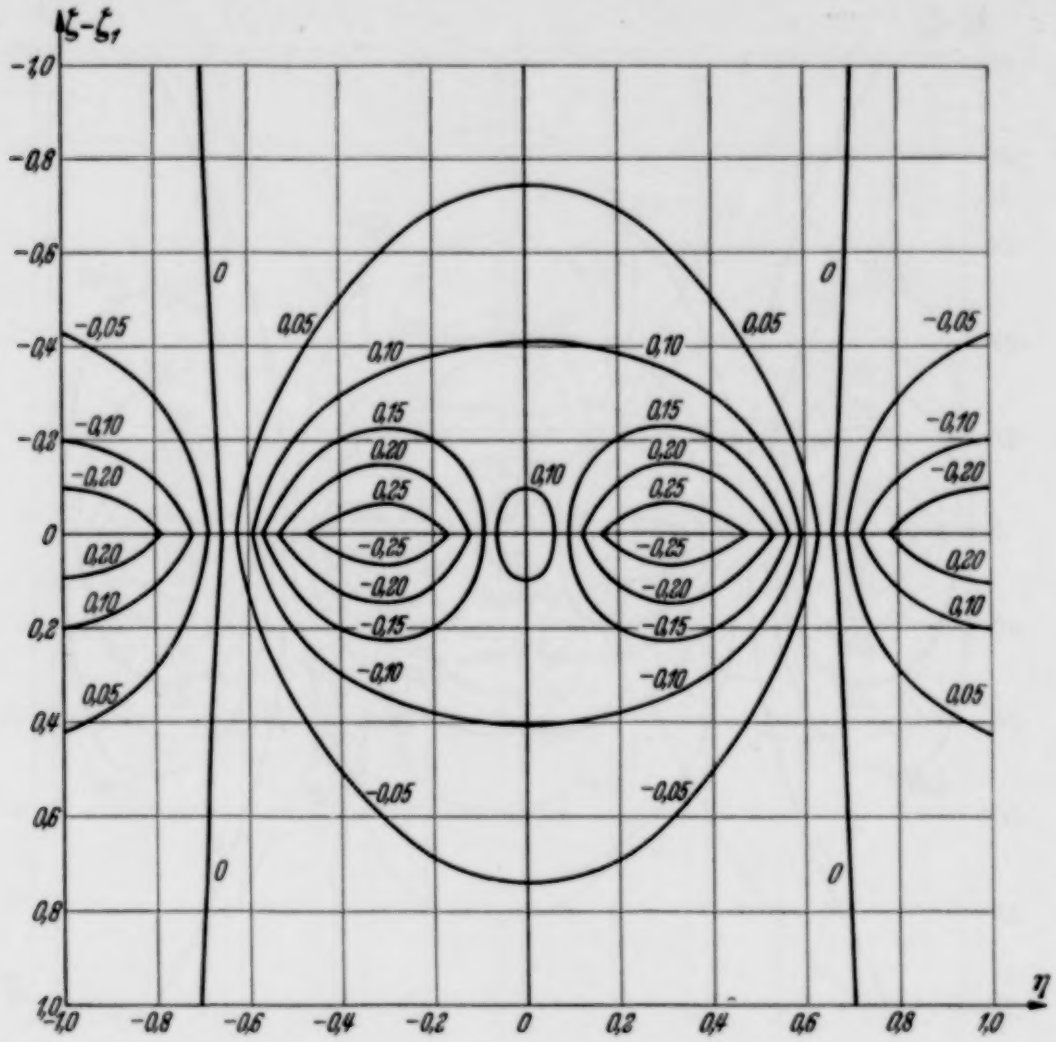



Abb. 7. Kurven $F_5$ = konst. in der $(\eta, \zeta)$-Ebene.

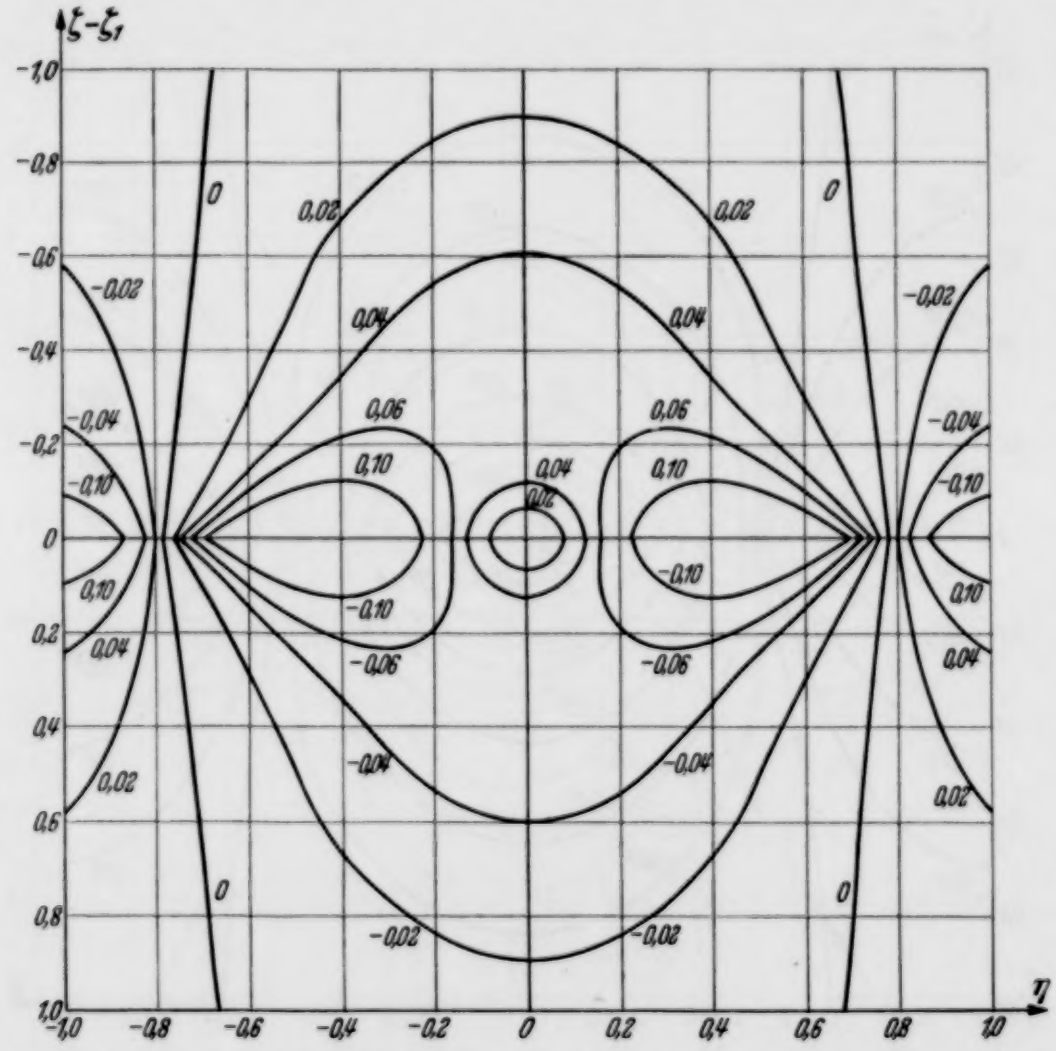



Abb. 8. Kurven $F_6$ = konst. in der $(\eta, \zeta)$-Ebene.

Die Einflußfunktionen $F_n$ sind nun für die gesamte Querebene $-1 \leq \eta \leq +1$ und $-1 \leq \zeta - \zeta_1 \leq +1$ berechnet worden. Die Ergebnisse sind in Kurvenform in Abb. 3 bis 8 dargestellt, und zwar wurden die Kurven $F_n = \text{konst.}$ $(n = 1, \ldots, 6)$ in der $[\eta, (\zeta - \zeta_1)]$-Ebene gezeichnet.

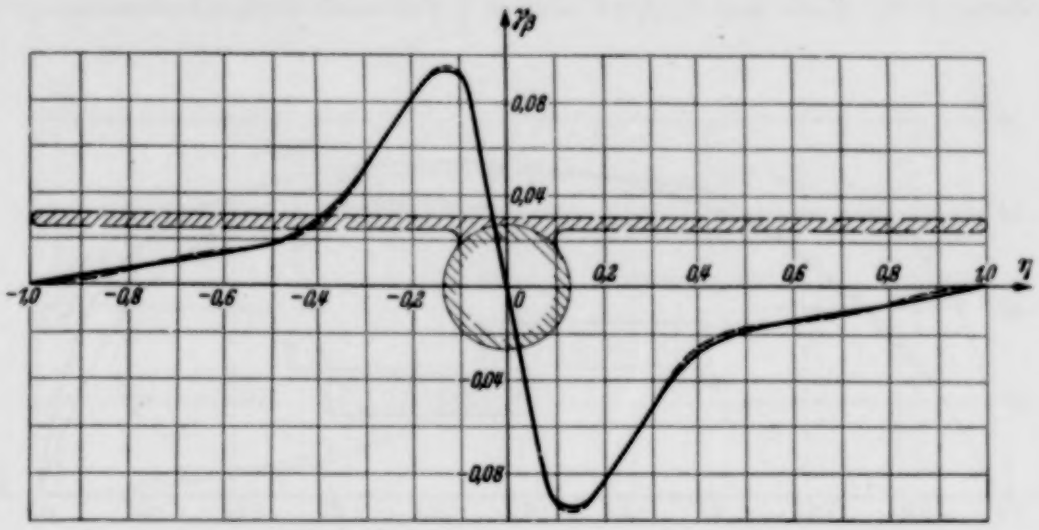



Abb. 9. Zusätzliche Auftriebsverteilung am Schulterdecker beim Schieben. Rumpf: Kreisquerschnitt $b/D = 7{,}5$; Flügel: Rechteck $A = 5$, $c'_{a\infty} = 2\pi$; Flügelhochlage $z_0/\frac{D}{2} = -1$; ausgezogene Kurve: Rechnung nach *Multhopp*; gestrichelte Kurve: Näherungspolynom nach Gl. (4): $\gamma_\beta = -1{,}88 f_1 + 2{,}99 f_3 - 2{,}21 f_5$.

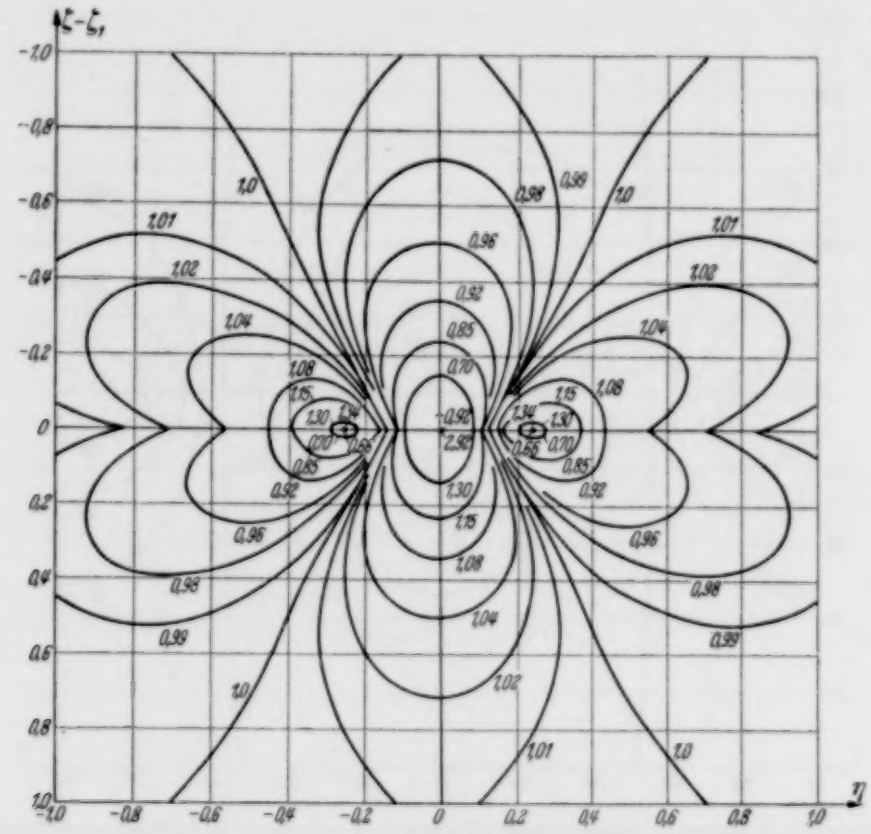



Abb. 10. Induziertes Seitenwindfeld ($\zeta_{S\,\text{örtl}} = \text{konst.}$) hinter einem Schulterdecker beim Schieben, vgl. Abb. 9.

Für eine vorgegebene antisymmetrische Auftriebsverteilung, für welche die Konstanten $K_n$ des Näherungspolynoms ermittelt worden sind, lassen sich sodann mit Hilfe der Einflußfunktionen $F_n$ auf einfache Weise das ganze praktisch interessierende Seitenwindfeld und der örtliche Wirkungsfaktor des Seitenleitwerkes bestimmen. Da der induzierte Seitenwind sich stark mit dem Abstand von der Wirbelschicht ändert, ist bei der Bestimmung des Wirkungsfaktors des gesamten Seitenleitwerkes über die Höhe des Seitenleitwerkes zu integrieren. Bei Berücksichtigung der veränderlichen Tiefe des Seitenleitwerkes gilt für den gesamten Wirkungsfaktor

die Beziehung

$$\overline{\zeta_S}(y) = 1 - \frac{1}{F_S} \int_{b_S} \frac{\partial \delta_s}{\partial \beta}(y, z)\, l_S(z)\, dz, \tag{8}$$

wobei $b_S$ die Höhe, $l_S$ die Tiefe und $F_S$ die Fläche des Seitenleitwerkes bedeuten.

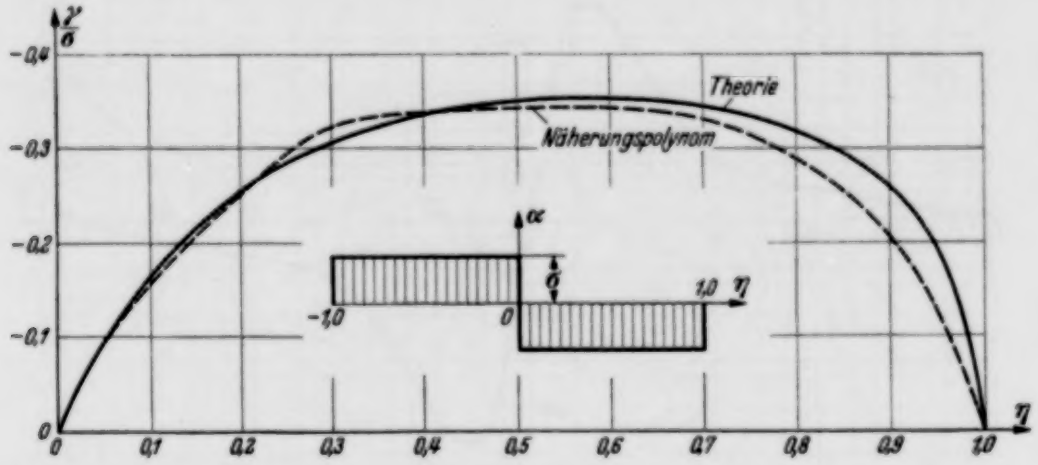



Abb. 11. Auftriebsverteilung mit Anstellwinkelsprung in Flügelmitte (Flügel mit V-Stellung). Flügel: Rechteck, $A = 5$, $c'_{a\,\infty} = 2\pi$; ausgezogene Kurve: Rechnung nach *Multhopp*; gestrichelte Kurve: Näherungspolynom nach Gl. (4); $\gamma/\sigma = 2{,}00\, f_1 - 2{,}82\, f_2 + 3{,}12\, f_3$.

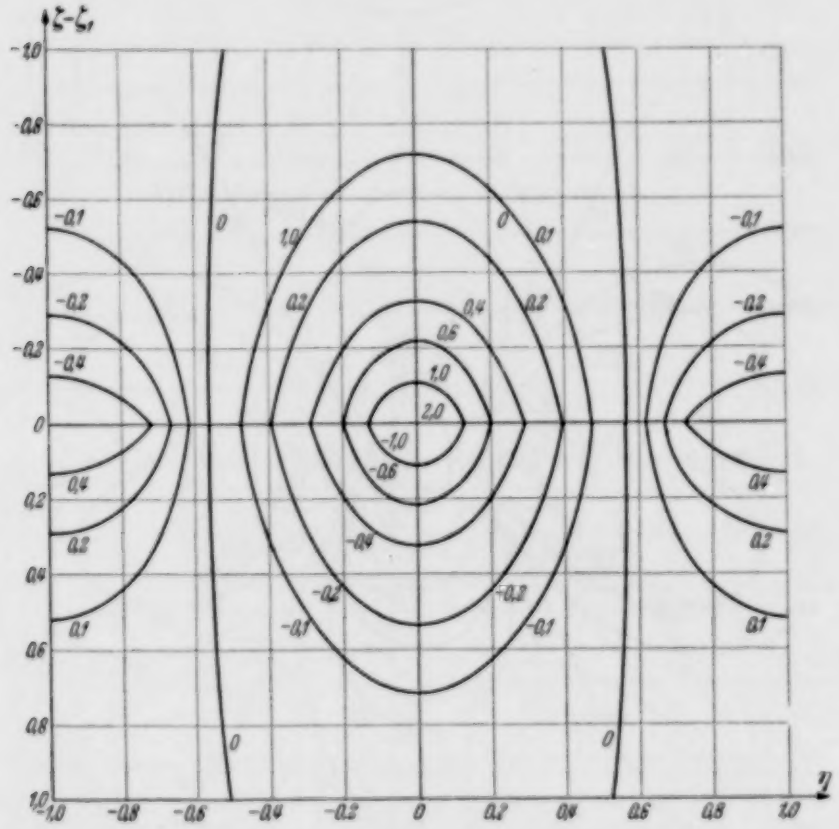



Abb. 12. Induziertes Seitenwindfeld (Kurven $\delta_S/\sigma$ = konst.) für Auftriebsverteilung mit Anstellwinkelsprung in Flügelmitte (Flügel mit V-Stellung); vgl. Abb. 11.

**4. Beispiele.** An einigen Beispielen möge die Anwendung des beschriebenen Verfahrens erläutert werden:

a) Flügel-Rumpfanordnung. Abb. 9 zeigt die Zirkulationsverteilung, welche an einem schiebenden Schulterdecker durch den Rumpf erzeugt wird[1, 2]. Für die Annäherung der Auftriebsverteilung wurden die drei ersten Polynome $f_1$, $f_2$, $f_3$ verwendet, die die tatsächliche Auf-

[1] *H. Schlichting* u. *W. Frenz*, Jahrbuch 1941 d. deutschen Luftfahrtforschung, S. I 300.
[2] *W. Jacobs*, Jahrbuch 1941 d. deutschen Luftfahrtforschung, S. I 165.

triebsverteilung sehr gut wiedergeben. Das zu dieser Verteilung gehörende induzierte Seitenwindfeld ($\zeta_S =$ konst.) ist in Abb. 10 dargestellt.

b) Stückweise antisymmetrische Anstellwinkelverteilungen. In Abb. 11 haben wir die Auftriebsverteilung dargestellt, die sich ergibt, wenn sich der Anstellwinkel in Flügelmitte ($\eta = 0$) sprunghaft um den Betrag von $\Delta\alpha = 2\sigma$ ändert. Dieser Fall liegt z. B. bei einem

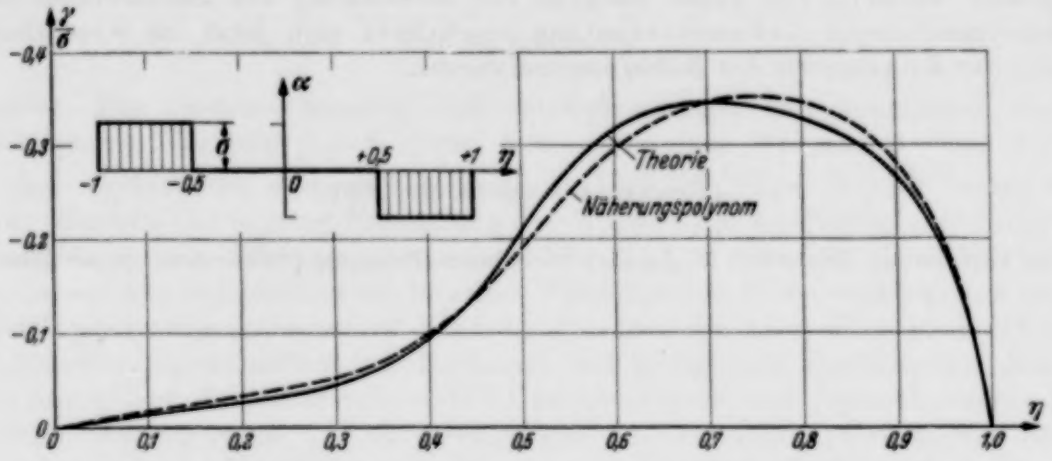



Abb. 13. Auftriebsverteilung infolge Querruderausschlag. Flügel: Rechteck, $\Lambda = 5$, $c'_{a\infty} = 2\pi$; ausgezogene Kurve: Rechnung nach *Multhopp*; gestrichelte Kurve: Näherungspolynom nach Gl. (5); $\gamma/\sigma = 0{,}432 f_4 - 2{,}27 f_5 + 5{,}75 f_6$.

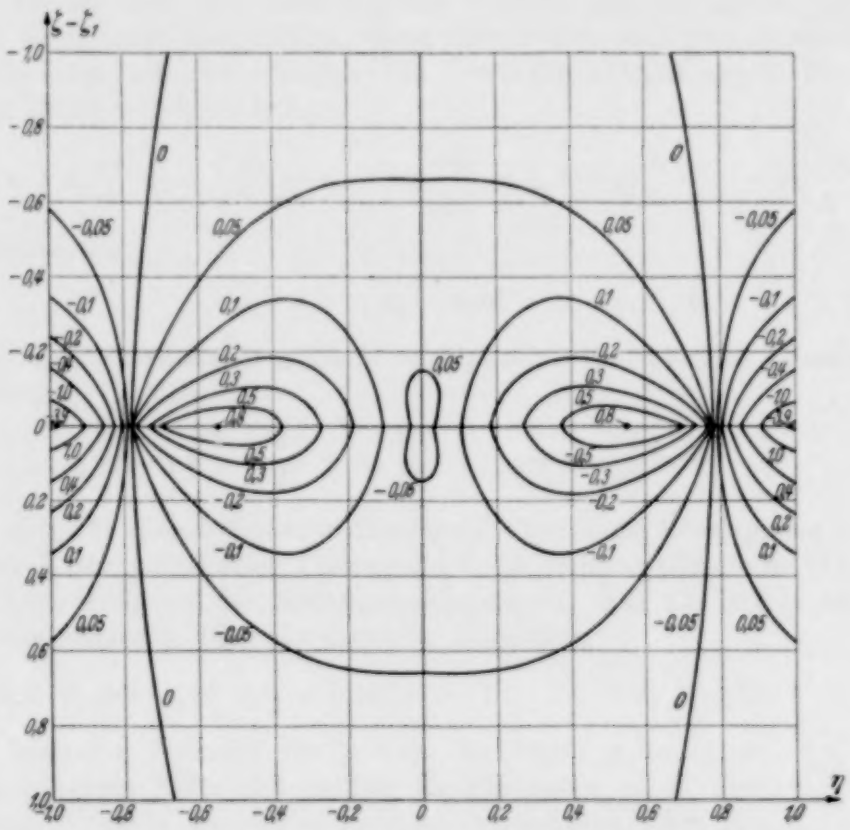



Abb. 14. Induziertes Seitenwindfeld (Kurven $\delta_S/\sigma =$ konst.) infolge Querruderausschlag, vgl. Abb. 13.

schiebenden Flügel mit V-Stellung vor. Die genaue Auftriebsverteilung ist mit der Näherungsverteilung (Polynome $f_4, f_5, f_6$) verglichen. Die Übereinstimmung ist befriedigend. Die Kurven konstanten induzierten Seitenwindes $\delta_S/\sigma =$ konst. für die Näherungskurve enthält Abb. 12.

In Abb. 13 ist die Auftriebsverteilung dargestellt, die sich bei einem antisymmetrischen Anstellwinkelsprung nur in der äußeren Flügelhälfte ergibt. Dieser Fall entspricht etwa einem Querruderausschlag. Bei der Näherungsdarstellung wurden wieder nur die drei letzten Polynome $f_4$, $f_5$, $f_6$ verwendet. Die Übereinstimmung ist befriedigend. Das induzierte Seitenwindfeld ($\delta_S/\sigma =$ konst.) für die Näherungskurve zeigt Abb. 14.

**5. Zusammenfassung.** Es wird ein Verfahren angegeben, das es gestattet, das induzierte Seitenwindfeld hinter einem Flugzeug für antisymmetrische Auftriebsverteilungen auf einfache Weise zu berechnen und damit die Wirksamkeit des Seitenleitwerkes zu bestimmen. Dabei wird die antisymmetrische Zirkulationsverteilung ersetzt durch ein Näherungspolynom mit freien Konstanten, die sich leicht für eine vorgegebene Verteilung bestimmen lassen. Die Einflußfunktionen der einzelnen Polynome auf den induzierten Seitenwind sind berechnet und in Kurvenform dargestellt worden. Die ganze Aufgabe der Berechnung des Seitenwindes für eine vorgelegte antisymmetrische Auftriebsverteilung beschränkt sich jetzt im wesentlichen auf die Bestimmung der Konstanten des Näherungspolynoms.

(Eingegangen am 28. Mai 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. habil. *W. Jacobs*, Stockholm-Bromma (Schweden), Stora Mossens Backe 6.

# Koeffizientenbedingungen zur Kontrolle des Dämpfungsgrades bei Ausgleichvorgängen (verallgemeinerte Hurwitzbedingungen).

Von O. Schmutz.

**1. Übersicht.** Für Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten geben die komplexen Wurzeln $p_\nu = b_\nu + i w_\nu$, bzw. die reellen Wurzeln $p_{\nu'} = b_{\nu'}$ der „Stammgleichung" den Verlauf der Einzelschwingungen $C_\nu e^{(b_\nu + i w_\nu t)}$ bzw. $C_{\nu'} e^{b_{\nu'} t}$ eines Ausgleichsvorganges an. *Hurwitz* stellte ohne Ermittlung der Wurzeln die Koeffizientenbedingungen dafür auf, daß nur abklingende Schwingungen mit $b_\nu$ bzw. $b_{\nu'} < 0$ auftreten (Ziff. 3). Die *Hurwitz*bedingungen lassen sich bekanntlich in einfacher Weise auf den Fall erweitern, daß ein Maximalwert der Abklingzeit vorgeschrieben ist (Ziff. 4). Darüber hinaus werden nachstehend (Ziff. 6) mit Hilfe bekannter Eigenschaften der Polynome mit komplexen Koeffizienten Koeffizientenbedingungen angegeben, die sicherstellen, daß Dämpfungsgrad bzw. logarithmisches Dekrement sämtlicher Einzelschwingungen eine vorgeschriebene Grenze nicht unterschreiten (Ziff. 8). Als Grenzfall ergeben sich die Koeffizienzenbedingungen dafür, daß alle Wurzeln reell und negativ sind, daß also der Ausgleichsvorgang rein aperiodisch erfolgt (Ziff. 9 und 12). Schließlich wird noch der Grenzfall behandelt, daß alle Wurzeln gleichen Betrag besitzen (Ziff. 13).

**2. Einleitung.** Ändert sich in einem linearen System eine Störgröße um die Abweichung $s = s(t)$ von einem Gleichgewichtszustand, dann ändert sich eine von dieser Störung abhängige Größe — in der Regelungstechnik die Regelgröße — um die Abweichung $x$. Für die Abweichung $x$ gilt dann folgende Differentialgleichung:

$$a_0 x + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^n x}{dt^n} = g_0 s + g_1 \frac{ds}{dt} + \cdots g_n \frac{d^m s}{dt^m} . \tag{1}$$

mit konstanten Beiwerten

$$a_0, a_1, \cdots a_n \quad \text{und} \quad g_0, g_1 \cdots g_m .$$

Um sie zu lösen, sucht man zunächst $n$ linear voneinander unabhängige Lösungen der verkürzten Differentialgleichung

$$a_0 x + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \cdots + a_n \frac{d^n x}{dt^n} = 0 \tag{2}$$

und ergänzt ihre sich aus diesen linear aufbauende allgemeine Lösung, die $n$ willkürliche Konstanten besitzt, durch eine partikuläre Lösung der vollständigen Gleichung (1). Die $n$ Konstanten ermöglichen die Anpassung an die Anfangsbedingungen. Für (2) liefert zunächst der Ansatz $x = C e^{pt}$ die Stammgleichung (charakteristische Gleichung)

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n = 0 . \tag{3}$$

Diese Gleichung besitzt $n$ Wurzeln für $p$ von der Form $p = b_\nu + i w_\nu$ bzw. $p_{\nu'} = b_{\nu'}$. In unserem Falle der reellen Koeffizienten $a_0$, $a_1$ usw. sind die komplexen Wurzeln paarweise konjugiert komplex. Auf den Sonderfall mehrfacher Wurzeln (mehrerer gleicher Wurzeln) soll zunächst nicht näher eingegangen werden.

Sind alle reellen Anteile $b_\nu$ der Wurzeln negativ, liegen sie also in Abb. 1 in dem linken nicht schraffierten Teil der *Gauß*schen Zahlenebene, dann klingen alle angestoßenen Eigenschwingungen ab. Beim Aufhören der Störung, bzw. bei einer von einem bestimmten Zeitpunkt ab konstanten Störgröße $s$ strebt die Größe $x$ einem konstanten Endwert zu. Das System ist stabil.

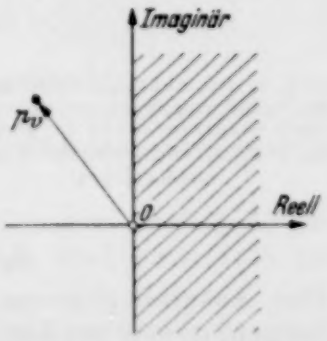



Abb. 1. Stabilität, wenn jede Wurzel $p_\nu$ im nichtschraffierten Gebiet der komplexen Zahlenebene liegt.

**3. Stabilitätsbedingung von Hurwitz.** Ohne Aufsuchung der Wurzeln der Gleichung (3), was bei Stammgleichungen höherer Ordnung nicht mehr direkt möglich ist, konnte *Hurwitz* die

Koeffizientenbedingung[1] für diese Stabilität angeben:

$$\left.\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\right\} > 0\,. \tag{4}$$

Sind alle Beiwerte $a_0, a_1, a_2 \cdots a_n$ positiv und die „Abschnittsdeterminanten" der eingerahmten quadratischen Schemata größer als Null, dann ist Stabilität vorhanden.

Es treten $n-1$ Determinanten auf mit der Hauptdeterminante vom Grade $n-1$. Als Beispiel fordert bei $n=3$ die Hauptdeterminante $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Man kann in die verkürzte Differentialgleichung auch $x = C e^{t/q}$ einführen, also $p = \frac{1}{q}$ setzen. Es wird dann die Stammgleichung erhalten

$$a_n + a_{n-1}\, q + a_{n-2}\, q^2 + \cdots + a_1\, q^{n-1} + a_0\, q^n = 0\,. \tag{5}$$

Besitzt eine Wurzel $p_\nu$ negativen Realteil, dann hat auch $q_\nu$ einen negativen Realteil. Der Determinantenbedingung (4) ist also die folgende gleichwertig[2]:

$$\left.\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\right\} > 0\,. \tag{6}$$

**4. Forderung einer maximalen Abklingzeit.** In der Regelungstechnik kann man sich nicht damit begnügen, daß die angestoßenen Eigenschwingungen irgendwann abklingen, sondern sie müssen mit einer gewissen Sicherheit und genügend rasch abklingen. Für die Wurzel $p_\nu = b_\nu + i w_\nu$ ist $-1/b_\nu = T_\nu$ die Abklingzeitkonstante der zugehörigen Teilschwingung. Schreibt man einen Maximalwert $T_0 = -1/b_0$ vor, so bedeutet dies: alle $|b_\nu|$ müssen größer sein als $|b_0|$, d. h. alle $p_\nu$-Werte müssen in der komplexen Ebene links des Punktes $0'$ liegen, der durch den Zeiger $b_0$ festgelegt ist (Abb. 2).

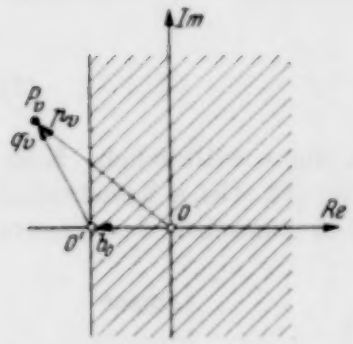



Abb. 2. Die Abklingzeitkonstanten der Teilschwingungen unterschreiten einen Grenzwert, wenn die Wurzeln $p_\nu$ bzw. $q_\nu$ im nichtschraffierten Gebiet liegen.

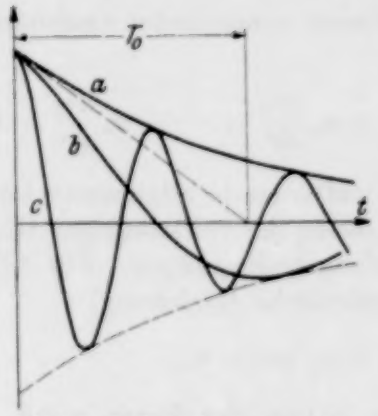



Abb. 3. Teilschwingungen $a$, $b$, $c$ gleicher Abklingzeitkonstante $T_0$ aber verschiedenem Dämpfungsgrad bzw. verschiedenem $\omega$.

Der vom Punkt $0'$ nach dem Punkt $P_\nu$ gezogene Zeiger $q_\nu = p_\nu - b_0$ muß einen negativen Realteil besitzen. Es ist also die bekannte Koordinatenverschiebung[3] $p = q + b_0$ vorzunehmen, wobei man für die Stammgleichung erhält

$$a_0 + a_1(q + b_0) + a_2(q + b_0)^2 + \cdots + a_n(q + b_0)^n = 0\,. \tag{7}$$

Das Ausmultiplizieren kann bei gegebenen Zahlenwerten $a_\nu$ rasch nach dem *Horner*-Schema vorgenommen werden, und man erhält

$$A_0 + A_1\, q + A_2 q^2 + \cdots + A_n\, q^n = 0\,. \tag{8}$$

Für diese Koeffizienten $A_0, A_1 \ldots A_n$ muß nun wieder die *Hurwitz*bedingung erfüllt sein.

[1] *W. Schmeidler*, Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik, S. 68ff. Berlin 1949.

[2] *A. Leonhard*, Die selbsttätige Regelung S. 186, Berlin 1949.

[3] *W. Schmeidler* a. a. O., S. 71.

Für den Grenzfall $T_r = -1/b_0 = T_0$ müssen in Abb. 3 die Teilschwingungen bei entsprechendem Maßstab entweder mit der Exponentialkurve $a$ zusammenfallen oder als abklingende Schwingungen zwischen der Kurve $a$ und ihrer an der $t$-Achse gespiegelten Kurve (gestrichelt gezeichnet) liegen wie die Kurven $b$ und $c$. Die Kurve $c$ entspricht hohen $w$-Werten, wobei das Verhältnis zweier aufeinander folgender Ausschläge nur wenig kleiner als 1 ist. Es ist hier also nur eine geringe Sicherheit gegen dauernde Pendelungen vorhanden.

**5. Dämpfungsgrade[1] der Einzelschwingungen und Mindest-Dämpfungsgrad für den Gesamtvorgang.** Für die Stammgleichung zweiten Grades einer Einzelschwingung

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 = 0 \tag{9}$$

lauten ihre zwei Lösungen

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2}\left(+1 \mp i\sqrt{\frac{4a_0 a_2}{a_1^2} - 1}\right) = b \pm iw = |p_1| e^{i\alpha_{1,2}}. \tag{10}$$

Hierbei sind die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$b = -\frac{a_1}{2a_2}, \qquad w = -b\sqrt{\frac{1}{D^2} - 1}\ , \tag{11}$$

$$D = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} = \text{Dämpfungsgrad}\ , \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \pm\frac{w}{b} = \mp\sqrt{\frac{1}{D^2} - 1}\ . \tag{13}$$

Die Richtungswinkel $\alpha_{1,2}$ der Zeiger $p_1$ und $p_2$ sind nur von dem Dämpfungsgrad $D$ abhängig.

Das Amplitudenverhältnis für eine Halbschwingung beträgt

$$a' = e^{+\frac{b\pi}{w}} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1/D^2 - 1}}} = e^{\frac{\pi}{\operatorname{tg}\alpha_1}} = e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\beta}} \tag{14}$$

mit

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{1}{D^2} - 1} \quad \text{und} \quad \cos\beta = D. \tag{14a}$$

Das logarithmische Dekrement $L'$ für die Halbperiode bzw. $L$ für die ganze Periode ergeben sich damit zu

$$L' = \frac{1}{2}L = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{D^2} - 1}}\ . \tag{15}$$

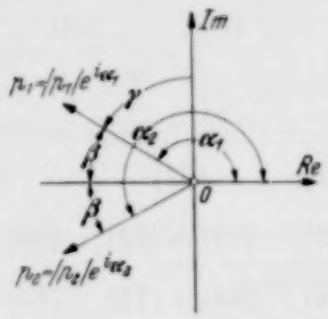



Abb. 4. Die Winkel zur Kennzeichnung der Lage der konjugiert komplexen Wurzeln $p_1$ und $p_2$.

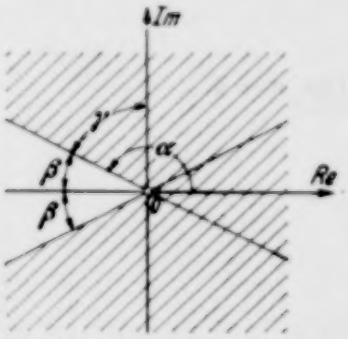



Abb. 5. Die Dämpfungsgrade der Teilschwingungen überschreiten einen Grenzwert $D = \cos\beta$, wenn alle Wurzeln innerhalb des nichtschraffierten Winkelraumes liegen.

Der Dämpfungsgrad Null entspricht der ungedämpften Dauerschwingung, der Dämpfungsgrad 1 dem exponentiellen Abklingen und der Dämpfungsgrad 0,5 einer gut gedämpften Schwingung mit

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \mp\sqrt{3}\ , \quad \alpha_{1,2} = \pm 120°\ , \quad \beta = 60°\ , \quad a' = 0{,}163 = \frac{1}{6{,}13}\ .$$

Die folgende Amplitude ist also in diesem Fall nur rund 1/6 jeder vorhergehenden.

In Abb. 4 ist die Lage der Wurzeln $p_1$ und $p_2$ dargestellt, wobei der Winkel $\beta = \pi - \alpha_1$ ersichtlich ist. Dieser Winkel ist positiv bei den praktisch interessierenden Fällen eines negativen Realteiles.

Mit dem Dämpfungsgrad $D$ ist nach (15) das logarithmische Dekrement, nach (14) das Amplitudenverhältnis von zwei aufeinanderfolgenden Halbschwingungen und nach (13) der Richtungswinkel $\alpha$ der Wurzeln bzw. der Winkel $\beta$ bestimmt.

Für eine gute Regelung müssen nun alle Ausgleichsschwingungen Dämpfungsgrade besitzen, die größer als ein vorgegebener Mindestdämpfungsgrad sind. Alle Wurzeln müssen also innerhalb des in Abb. 5 nicht schraffierten Winkelraumes liegen, der durch einen der Winkel

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi, \qquad \frac{\pi}{2} > \beta \geq 0\ , \qquad 0 < \gamma \leq \frac{\pi}{2}$$

[1] Regelungstechnik-VDI-Fachausschuß, S. 48, Berlin 1944.

definiert werden kann[1]. Ob diese Bedingung erfüllt ist, läßt sich nun ohne Bestimmung der Wurzeln der Stammgleichung direkt durch Determinantenbedingungen für ihre Koeffizienten angeben. Die *Hurwitz*bedingungen bilden nur den Sonderfall mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\beta = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\gamma = 0$.

**6. Eigenschaften der Polynome mit komplexen Koeffizienten**[2]. Es werden für die Aufstellung der gewünschten Koeffizientenbedingungen gewisse Eigenschaften der Polynome $n$-ten Grades mit konstanten aber beliebigen komplexen Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots A_n$ benutzt. Die Wurzeln besitzen sämtliche dann und nur dann positive Imaginärteile, liegen also in der oberen Halbebene, bzw. „links der Richtung der positiven reellen Achse", wenn die folgenden Abschnittdeterminanten positiv sind. Werden hierbei die Abkürzungen verwendet

$$(k\,l) = \frac{1}{2}\,i\left(A_k\,\bar{A}_l - A_l\,\bar{A}_k\right) = |A_k|\,|A_l| \sin(\varepsilon_l - \varepsilon_k)\,, \tag{16}$$

$$A_k = |A_k|\,e^{i\,\varepsilon_k}; \qquad \bar{A}_k = |A_k|\,e^{-i\,\varepsilon_k}\,, \tag{17}$$

so gilt für $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} \boxed{(01)} & (02) \\ (02) & (12) \end{vmatrix} > 0\,, \tag{18}$$

für $n = 3$

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} (01) & (02) \\ (02) & (03)+(12) \end{matrix}} & (03) \\ (03) & (13) \end{vmatrix} > 0\,, \tag{19}$$

für $n = 4$

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} (01) & (02) & (03) \\ (02) & (03)+(12) & (04)+(13) \\ (03) & (04)+(13) & (14)+(23) \end{matrix}} & (04) \\ (04) & (14) \end{vmatrix} > 0\,, \tag{20}$$

für $n = 5$

$$\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} (01) & (02) & (03) & (04) \\ (02) & (03)+(12) & (04)+(13) & (05)+(14) \\ (03) & (04)+(13) & (05)+(14)+(23) & (15)+(24) \\ (04) & (05)+(14) & (15)+(24) & (25)+(34) \end{matrix}} & (05) \\ (05) & (15) \end{vmatrix} > 0\,. \tag{21}$$

Das Bildungsgesetz ist nun leicht zu übersehen, wenn beachtet wird, daß bei den in Summenform auftretenden Gliedern die Quersumme jedes Klammerausdruckes gleich groß ist.

**7. Übergang zu den Bedingungen für vorgegebene Mindestdämpfung $D$ bzw. für den entsprechenden Winkelgrenzwert $\beta$.** Sind die in Ziff. 6 aufgestellten $n$ Koeffizientenbedingungen für das Polynom $n$-ter Ordnung erfüllt, liegen also sämtliche Wurzeln links der reellen Achse, dann muß für alle Wurzeln $0 < \alpha < \pi$ sein. Zum Zwecke der angestrebten Verallgemeinerung wird eine Koordinatendrehung $p = q e^{i\beta}$ vorgenommen ($0 \leq \beta \leq \pi$; $\beta =$ konstant), also die

[1] *A. Leonhard* a. a. O., S. 198ff.
[2] *W. Schmeidler*, a. a. O., S. 62.

Stammgleichung statt in Koordinaten der $p$-Ebene jetzt in Koordinaten der $q$-Ebene ausgedrückt:

$$a_0 + a_1 e^{i\beta} q + a_2 e^{i2\beta} q^2 + \cdots + a_n e^{in\beta} q^n = 0\,, \tag{22}$$

$$A_0 + A_1 q + A_2 q^2 + \cdots + A_n q^n = 0\,. \tag{23}$$

Der Punkt $p = |p| e^{i\alpha}$ der $p$-Ebene geht über in den Punkt $q = |p| e^{i(\alpha-\beta)}$ der $q$-Ebene. Werden die obigen Ungleichungen für die in $q$ ausgedrückte Stammgleichung mit den komplexen Koeffizienten $A_0$, $A_1$, $A_2$ erfüllt, dann liegen die Wurzeln in der Halbebene links der Richtung der reellen Achse der $q$-Ebene. Dieser Richtung entspricht in der $p$-Ebene die Richtung $\alpha = \beta$. In der uns interessierenden $p$-Ebene liegen die Wurzeln dann nur in der Halbebene links der Richtung $\alpha = \beta$.

Berücksichtigt man ferner, daß die Wurzeln in der $p$-Ebene nur konjugiert komplex auftreten können, so treten sie dann hier weder in der Halbebene rechts der Richtung $\alpha = \beta$ noch in der Halbebene links der konjugierten Richtung $\alpha = -\beta$ auf, so daß die Wurzeln nur in dem in Abb. 5 nicht schraffierten Raum liegen können. Sie können also nur Richtungswinkel zwischen $\alpha = \pi - \beta$ und $\alpha = \pi + \beta$ besitzen.

In dem bisher zugänglichen Schrifttum ist nur der Sonderfall $\beta = 90°$ behandelt[1]. Hierbei ergeben sich aus den Ungleichungen (18) bis (21) Determinantenbedingungen, die zwar weniger übersichtlich wie bei *Hurwitz* sind, aber auch weniger Auswertarbeit erfordern. Doch gibt es auch für die schnelle Auswertung der *Hurwitz*determinanten geeignete Methoden[2].

**8. Koeffizientenbedingungen für eine Mindestdämpfung $\beta$.** Die Beziehungen (16) bis (21) sind jetzt sinngemäß auf die komplexen Koeffizienten $A_\nu = |A_\nu| e^{i\nu\beta}$ der Gleichung (23) anzuwenden. Gleichung (16) ergibt

$$(k\,l) = |A_k|\ |A_l| \sin(l-k)\beta\,, \tag{24}$$

für $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 \sin\beta & a_0 a_2 \sin 2\beta \\ a_0 a_2 \sin 2\beta & a_1 a_2 \sin\beta \end{vmatrix} > 0\,, \tag{25}$$

für $n = 3$

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 \sin\beta & a_0 a_2 \sin 2\beta & a_0 a_3 \sin 3\beta \\ a_0 a_2 \sin 2\beta & a_0 a_3 \sin 3\beta + a_1 a_2 \sin\beta & a_1 a_3 \sin 2\beta \\ a_0 a_3 \sin 3\beta & a_1 a_3 \sin 2\beta & a_2 a_3 \sin\beta \end{vmatrix} > 0\,. \tag{26}$$

Damit ist das Bildungsgesetz dieser Determinanten aus ihrer allgemeinen Form ersichtlich. Es ergeben sich hier $n$ Determinanten mit einer Hauptdeterminante $n$-ten Grades.

Liegen $r$ Wurzelpaare an der Stabilitätsgrenze, dann sind die $2r$ höchsten Determinanten der Stabilitätsbedingung (5) gleich Null[3]. Analog wird in Erweiterung dieses Satzes gefolgert: Liegen $r$ Wurzelpaare an der Mindestdämpfungsgrenze, dann sind die $2r$ höchsten Determinanten der Mindestdämpfungsbedingungen gleich Null. Umgekehrt können unter Nullsetzung dieser $2r$ höchsten Determinanten die Koeffizienten so bestimmt werden, daß $2r$ Wurzelpaare gerade die geforderte Mindestdämpfung besitzen.

**9. Koeffizientenbedingung für eine aperiodische Dämpfung.** Für den Grenzfall $\beta \to 0$ liegen, wie Abb. 6 andeutet, alle Wurzeln $p$ auf der negativen reellen Achse, wobei im aperiodischen Grenzfall auch Doppelwurzeln bzw. Mehrfachwurzeln auftreten können. Es wird hierbei $\sin\nu\beta = \nu\beta$, wobei mit den gemeinsamen Faktoren $\beta$ dividiert werden kann. Man hat also

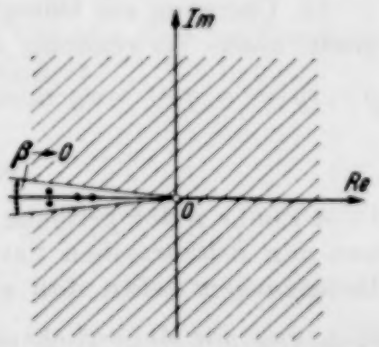



Abb. 6. Die Dämpfungsgrade der Teilschwingungen werden gleich oder größer als 1 bzw. alle Wurzeln werden negativ reell, wenn diese in dem nichtschraffierten Winkelraum mit dem Grenzübergang $\beta \to 0$ liegen.

[1] *W. Schmeidler*, a. a. O., S. 66.
[2] *W. Schmeidler*, a. a. O., S. 68.
[3] *H. Cremer*, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947) S. 160.

für $n=2$

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 & 2 a_0 a_2 \\ 2 a_0 a_2 & a_1 a_2 \end{vmatrix} > 0 , \tag{27}$$

für $n=3$

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 & 2 a_0 a_2 & 3 a_0 a_3 \\ 2 a_0 a_2 & 3 a_0 a_3 + a_1 a_2 & 2 a_1 a_3 \\ 3 a_0 a_3 & 2 a_1 a_3 & a_2 a_3 \end{vmatrix} > 0 . \tag{28}$$

für $n=4$

$$\begin{vmatrix} a_0 a_1 & 2 a_0 a_2 & 3 a_0 a_3 & 4 a_0 a_4 \\ 2 a_0 a_2 & 3 a_0 a_3 + a_1 a_2 & 4 a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 & 3 a_1 a_4 \\ 3 a_0 a_3 & 4 a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 & 3 a_1 a_4 + a_2 a_3 & 2 a_2 a_4 \\ 4 a_0 a_4 & 3 a_1 a_4 & 2 a_2 a_4 & a_3 a_4 \end{vmatrix} > 0 . \tag{29}$$

**10. Eigenschaften eines Polynom mit komplexen Koeffizienten nach Bilharz[1].** Diese andere Darstellung soll angeführt werden, da sie ein übersichtliches Schema ergibt. Für die rechnerische Auswertung erscheint es aber weniger geeignet.

Die Wurzeln von (23) mit beliebigen komplexen Koeffizienten $A_\nu = A'_\nu + i A''_\nu$ haben dann und nur dann alle einen negativen Realteil, wenn $A_0 \neq 0$ und die nachfolgenden Abschnittsdeterminanten gerader Ordnungszahl positiv sind:

$$\begin{vmatrix} A'_0 & A''_1 & -A'_2 & -A''_3 & A'_4 & A''_5 & -A'_6 & -A''_7 & \cdots \\ -A''_0 & A'_1 & A''_2 & -A'_3 & -A''_4 & A'_5 & A''_6 & -A'_7 & \cdots \\ 0 & A'_0 & A''_1 & -A'_2 & -A''_3 & A'_4 & A''_5 & -A'_6 & \cdots \\ 0 & -A''_0 & A'_1 & A''_2 & -A'_3 & -A''_4 & A'_5 & A''_6 & \cdots \\ 0 & 0 & A'_0 & A''_1 & -A'_2 & -A''_3 & A'_4 & A''_5 & \cdots \\ 0 & 0 & -A''_0 & A'_1 & A''_2 & -A'_3 & -A''_4 & A'_5 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} > 0 . \tag{30}$$

**11. Übergang zur Dämpfungsbedingung für einen vorgegebenen Grenzwert $D$ der Dämpfungsgrade unter Verwendung des Bilharzschen Satzes.** Es wird wieder eine Koordinatendrehung $p = |p| e^{i\alpha} = q e^{i\gamma}$ vorgenommen $\left(0 < \gamma < \frac{\pi}{2}\text{, vgl. Abb. 4}\right)$.

$$a_0 + a_1 e^{i\gamma} q + a_2 e^{i 2\gamma} q^2 + \cdots + a_n e^{i n\gamma} q^n = 0 . \tag{31}$$

Dem Punkt $p$ der $p$-Ebene entspricht ein Punkt $q = |p| e^{i(\alpha-\gamma)}$ der neuen $q$-Ebene. Wir wenden nun den *Billharz*schen Satz (30) auf das $q$-Polynom mit $A_\nu = a_\nu e^{i\nu\gamma}$ an und erhalten dann die Bedingungen dafür, daß alle $q$-Wurzeln nur in der Halbebene links der positiven imaginären Richtung mit dem Richtungswinkel $\frac{\pi}{2} = \alpha - \gamma$ in der $q$-Ebene liegen. Dies bedeutet, daß die $p$-Wurzeln dann nicht in der in Abb. 5 schraffierten Halbebene rechts des Richtungswinkels $\alpha = \frac{\pi}{2} + \gamma$ liegen können. Da nun wieder bei reellen Koeffizienten $a_\nu$ die $p$-Wurzeln nur reell oder konjugiert komplex auftreten können, müssen alle diese Wurzeln in dem nicht schraffierten Winkelbereich $2\beta$ liegen mit $\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$. Für die Koeffizienten ist nun

[1] *W. Schmeidler*, a. a. O., S. 70.

$$A_\nu = a_\nu e^{i\nu\gamma} = A'_\nu + i A''_\nu = a_\nu \cos\nu\gamma + i a_\nu \sin\nu\gamma\,, \tag{32}$$

$$A'_\nu = a_\nu \cos\nu\gamma = a_\nu \cos\nu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = a_\nu\left(\cos\nu\frac{\pi}{2}\cos\nu\beta + \sin\nu\frac{\pi}{2}\sin\nu\beta\right). \tag{33}$$

$$A''_\nu = a_\nu \sin\nu\gamma = a_\nu \sin\nu\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = a_\nu\left(\sin\nu\frac{\pi}{2}\cos\nu\beta - \cos\frac{\nu\pi}{2}\sin\nu\beta\right). \tag{34}$$

Wir wenden nun die *Billharz*sche Bedingung (30) auf diese Werte an:

$$\left.\begin{array}{|cccc|}\hline a_0 & a_1\cos\beta & a_2\cos 2\beta & a_3\cos 3\beta \quad a_4\cos 4\beta \cdots\cdots \\ 0 & a_1\sin\beta & a_2\sin 2\beta & a_3\sin 3\beta \quad a_4\sin 4\beta \cdots\cdots \\ \hline 0 & a_0 & a_1\cos\beta & a_2\cos 2\beta \quad a_3\cos 3\beta \cdots\cdots \\ 0 & 0 & a_1\sin\beta & a_2\sin 2\beta \quad a_3\sin 3\beta \cdots\cdots \\ \hline 0 & 0 & a_0 & a_1\cos\beta \quad a_2\cos 2\beta \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_1\sin\beta \quad a_2\sin 2\beta \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} > 0\,. \tag{35}$$

Die $n$ Abschnittsdeterminanten gerader Ordnungszahl müssen alle größer als Null und außerdem $a_0 \lesseqgtr 0$ sein, dann liegen alle Wurzeln im Winkelbereich $2\beta$.

Bedingung 35) besteht aus $n$ Determinanten mit der Hauptdeterminanten der Ordnungszahl $2n$. Das übersichtliche Schema ist also durch eine doppelt so hohe Ordnungszahl gegenüber den Bedingungen (25) bzw. (26) erkauft, erscheint also weniger günstig für eine praktische Auswertung.

**12. Koeffizientenbedingungen für die aperiodische Dämpfung aus (35).** Die Bedingung, daß die Wurzeln der Stammgleichung alle reell und negativ sind erhält man durch den Grenzübergang $\beta \to 0$ aus der Ungleichung (35)

$$\left.\begin{array}{|cccccc|}\hline a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \cdots\cdots \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 & 5a_5 \cdots\cdots \\ \hline 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \cdots\cdots \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 \cdots\cdots \\ \hline 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} > 0 \quad \text{mit} \quad a_0 \lesseqgtr 0\,. \tag{36}$$

Zur Kontrolle wurden für $n = 3$ aus beiden Ungleichungen (27) und (36) die drei im Ergebnis übereinstimmenden Bedingungen für den aperiodischen Fall ausgerechnet:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= a_0 a_1 > 0\,, \\ D_2 &= a_0(3a_0 a_1 a_3 - 4a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) > 0\,, \\ D_3 &= a_0 a_3(18 a_0 a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 27 a_0^2 a_3^2) > 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Da alle Koeffizienten $a_\nu$ bereits nach *Hurwitz* für $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ positiv sein müssen, genügt es, daß außerdem nur noch die Klammerausdrücke der Determnianten $D_2$ und $D_3 > 0$ sind. Die Formel kann am Grenzfall der zusammenfallenden Wurzeln leicht nachkontrolliert werden, wobei alle Determinanten (36) von der Ordnungszahl größer als 1 zu Null werden. Das Beispiel mit drei Wurzeln $p_1 = p_2 = p_3 = -1$, nämlich

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 = 1 + 3p + 3p^2 + p^3 = (1+p)^3 = 0 \tag{38}$$

zeigt, daß die Koeffizienten dieser Gleichung die Determinanten $D_2$ und $D_3$ von Bedingung (37) zu Null werden.

**13. Sonderfall, daß alle Wurzeln gleichen Betrag und gleiche Dämpfung besitzen.** Wir bringen die Stammgleichung (3) auf die Normalform, indem wir sie zunächst mit $a_0$ dividieren.

$$1 + \frac{a_1}{a_0} p + \frac{a_2}{a_0} p^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0} p^n = 0 . \tag{39}$$

Mittels der Substitution

$$\frac{a_n}{a_0} p^n = q^n , \qquad p = q \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}} \tag{40}$$

wird schließlich erhalten

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{a_1}{a_0} \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}\, q + \frac{a_2}{a_0} \sqrt[n]{\left(\frac{a_0}{a_n}\right)^2} q^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \sqrt[n]{\left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{n-1}} q^{n-1} + q^n = 0 \\ &1 + \quad c_1 \; q + \quad\; c_2 \; q^2 + \cdots + c_{n-1} q^{n-1} + q^n = 0 . \end{aligned}\right| \tag{41}$$

Der erste und letzte Koeffizient ist hier gleich eins geworden. Für die neuen Koeffizienten ergibt sich also

$$c_k = \frac{a_k}{a_0} \sqrt[n]{\left(\frac{a_0}{a_n}\right)^k} \qquad \text{mit} \quad k = 1, 2, 3, \ldots . n - 1 . \tag{42}$$

Die neue Veränderliche $q$ ist nur ein positives reelles Vielfaches von $p$. Damit sind auch die $q$-Wurzeln ein reelles Vielfaches der $p$-Wurzeln.

Die Normierung des Polynoms zweiten Grades (6) ergibt

$$1 + 2Dq + q^2 = 1 + 2q\cos\beta + q^2 = 0 \tag{43}$$

mit den Wurzeln vom Betrage 1:

$$q_{1,2} = -D\left(1 \mp i\sqrt{\frac{1}{D^2} - 1}\right) = e^{i(\pi \mp \beta)} . \tag{44}$$

Die allgemeinen Gleichungen für Wurzeln gleichen Betrages und gleicher Dämpfung haben dann die Form

$$(1 + 2Dq + q^2)^{n/2} = 0 \qquad \text{für gerades } n , \tag{45}$$

$$(1 + 2Dq + q^2)^{\frac{n-1}{2}} (1 + q) = 0 \qquad \text{für ungerades } n . \tag{46}$$

Bei ungeradem $n$ muß eine reelle $q$-Wurzel vorhanden sein, und zwar ergibt der Wurzelwert $q = -1$ auch für die Polynome (46) symmetrische Koeffizienten

$$c_\nu = c_{n-\nu} \quad \text{mit} \quad \nu = 1, 2, 3 \ldots (n - 1)/2 .$$

Es ergeben sich damit folgende Beispiele von normierten Stammgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} D = 0 , \quad n &= 2, \quad 1 + q^2 = 0, \\ n &= 3, \quad 1 + q + q^2 + q^3 = 0, \\ n &= 4, \quad 1 + 2q^2 + q^4 = 0, \\ n &= 5, \quad 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5 = 0, \\ n &= 6, \quad 1 + 3q^2 + 3q^4 + q^6 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$\left.\begin{aligned} D = 0{,}5, \; n &= 2, \; 1 + q + q^2 = 0, \\ n &= 3, \; 1 + 2q + 2q^2 + q^3 = 0, \\ n &= 4, \; 1 + 2q + 3q^2 + 2q^3 + q^4 = 0, \\ n &= 5, \; 1 + 3q + 5q^2 + 5q^3 + 3q^4 + q^5 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} D = 1, \quad n &= 1, \; 1 + q = 0, \\ n &= 2, \; 1 + 2q + q^2 = 0, \\ n &= 3, \; 1 + 3q + 3q^2 + q^3 = 0, \\ n &= 4, \; 1 + 4q + 6q^2 + 4q^3 + q^4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Sind bei einer Regelaufgabe $n-1$ Konstanten $c_1, c_2 \ldots$ wählbar, dann wird man die Wahl nach Festlegung des erforderlichen Mindestdämpfungsgrades $D$ z.B. 0,5 so treffen, daß die normierte Stammgleichung mit der entsprechenden Gleichung (48) identisch ist.

**14. Koeffizientenbedingung, daß sämtliche Wurzeln außerhalb eines Kreises liegen**[1]. Auf diese bekannte Möglichkeit soll nur hingewiesen werden.

**15. Beurteilung der Ergebnisse.** Die Nachprüfbarkeit des Dämpfungsgrades an Hand der Koeffizientenbedingungen stellt eine wünschenswerte theoretische Erkenntnis dar. Praktisch gewähren sie wohl zu wenig Einblick über den Verlauf und die Beeinflußbarkeit des Ausgleichsvorganges. Die langwierige zahlenmäßige Auswertung für gegebene Koeffizienten gibt zunächst nur Auskunft, ob ein gewünschter Dämpfungsgrad eingehalten wird. Ist ein Teil der Koeffizienten noch wählbar, so können sie so bestimmt werden, daß ein Teil der komplexen Wurzeln gerade die Mindestdämpfungsgrenze erreichen. Der tatsächliche Verlauf des Ausgleichsvorganges hängt nicht etwa nur von den Wurzeln der Stammgleichung ab, sondern es wird die Größe der Teilschwingungen auch von den Koeffizienten der rechten Seite von (1) mitbestimmt. Diese ändern sich bei Variation der Koeffizienten der Stammgleichung meist ebenfalls.

(Eingegangen am 16. Juni 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Oskar Schmutz*, Karlsruhe, Technische Hochschule, Elektrotechnisches Institut.

[1] *W. Schmeidler*, a. a. O., S. 71; ferner ein Vortragsmanuskript vom 2. 4. 1948 (in unseren Händen) von *H. Tischner* (Tübingen) „Einführende Betrachtungen über Stabilität von Regelkreisen".

# Analogie zwischen Wasserschwall und Verdichtungsstoß.

Von E. Becker.

**1. Einleitung.** Schon seit längerer Zeit ist bekannt, daß die Gleichungen für die Strömung flachen Wassers über einer horizontalen, ebenen Sohle in erster Näherung den Gleichungen für die zweidimensionale Bewegung eines kompressiblen Gases gleichen. Die theoretische Fundierung dieser sogenannten hydraulischen Analogie verdankt man vor allem *Preiswerk*[1]. Es stellte sich allerdings bald heraus, daß die Wasserströmung eine ganze Reihe von Abweichungen gegenüber der Gasströmung zeigt, die einen quantitativen experimentellen Vergleich sehr erschweren. Ziel dieser Arbeit ist eine Diskussion der Abweichungen, die sich besonders beim Wassersprung, dem Analogon des Verdichtungsstoßes, bemerkbar machen. Unter Wassersprung ist hierbei allgemein eine unstetige Erhöhung des Wasserspiegels zu verstehen. Wandert diese Unstetigkeit relativ zur ruhenden Bodenfläche in Wassergebiete hinein, die sich in bezug auf die Bodenfläche in Ruhe befinden, so soll insbesondere von einem Wasserschwall die Rede sein. Unter den Wasserschwallen werden solche mit stetig bleibender Wasseroberfläche und solche mit einer Wasserwalze (= turbulente Durchmischungszone) unterschieden.

Ihrer Natur nach lassen sich die Abweichungen zwischen Verdichtungsstoß und Wassersprung in zwei Gruppen einteilen: Die erste Gruppe, auf die schon *Preiswerk* aufmerksam macht, wird durch das verschiedene thermodynamische Verhalten von Verdichtungsstoß und Wassersprung verursacht. Die zweite Gruppe ist darauf zurückzuführen, daß die Wasserströmung dreidimensional ist gegenüber der zweidimensionalen Gasströmung. Das heißt: es treten in ihr Vertikalgeschwindigkeiten auf, die kein Analogon in der Gasströmung haben. Außerdem hat das Wasser zwei Grenzflächen: Bodenfläche und Oberfläche. An jener wirkt die Bodenreibung ein, an dieser die Oberflächenspannung. Als Ergebnis der vorliegenden Untersuchung zeigt sich, daß das Zusammenwirken von Vertikalgeschwindigkeit und Oberflächenspannung die Ursache für zwei bei den Experimenten an Schwallen (in obigem Sinne) manchmal beobachteten Erscheinungen ist:

1. Wenn ein in ruhendes Wasser hineinlaufender Schwall nicht zu stark ist, bildet die Wasseroberfläche u. U. keine scharfe Unstetigkeit, sondern sie bleibt am Ort des Schwalls stetig, wenn auch sehr steil. In diesem Fall ist dem Schwall ein gut ausgebildetes System von Kapillarwellen vorgelagert, deren Phasengeschwindigkeit mit der Schwallgeschwindigkeit übereinstimmt.

2. Unter der Voraussetzung, daß der Schwall in einer solchen stetigen Erhöhung des Wasserspiegels besteht, beobachtet man bei Erfülltsein gewisser zusätzlicher Bedingungen (die in dieser Arbeit näher formuliert werden) schon vor dem Ort des eigentlichen Schwalls eine allmähliche, stetige Erhöhung des Wasserspiegels. Die Kapillarwellen überlagern sich im allgemeinen dieser stetigen Erhöhung, ohne sie wesentlich zu beeinflussen. Bei Wassertiefen, die kleiner als 0,4 cm sind, beobachtet man in keinem Fall einen stetigen Anstieg der eben beschriebenen Art, sondern nur Kapillarwellen. Wird der Schwall zu stark, so verschwinden stetige Erhöhung und Kapillarwellen und es bleibt am Ort des Schwalls eine heftige turbulente Durchmischungszone des Wassers.

**2. Verlustfreie Strömung.** Alle Vorgänge werden durch Wahl eines geeigneten Koordinatensystems stationär gemacht. Zunächst müssen drei grundlegende Vernachlässigungen bei den Bewegungsgleichungen des Wassers formuliert werden, die notwendig sind, um diese auf eine den Gleichungen des Gases analoge Form zu bringen:

I: Die Vertikalgeschwindigkeit und deren Ableitungen werden gleich Null gesetzt.

II: Innere Reibung und Bodenreibung bleiben unberücksichtigt.

III: Die Oberflächenspannung wird vernachlässigt.

Außerdem muß die Adiabatenkonstante (Verhältnis der spezifischen Wärmen $K = c_p/c_v$) des Gases, dessen Strömung mit der des flachen Wassers verglichen wird, gleich 2 gesetzt werden.

Es entsprechen sich dann folgende Größen (Abb. 1):

| | | |
|---|---|---|
| 1. Enthalpie | $i$ | $\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\}$ $\triangleq$ Wasserspiegelhöhe $\zeta$ über dem Boden, |
| Temperatur | $\Theta$ | |
| Gasdichte | $\varrho$ | |

[1] *E. Preiswerk*, Anwendung gasdynamischer Methoden auf Wasserströmungen mit freier Oberfläche, Diss. Zürich 1938.

2. Gasdruck $p \triangleq \frac{g}{2}\zeta^2$ ($g$ = Schwerebeschleunigung),

3. Schallgeschwindigkeit $\sqrt{\varkappa p/\varrho}$ $\triangleq$ Grundwellengeschwindigkeit $c \triangleq \sqrt{g\zeta}$.

Die wichtigsten sich entsprechenden Gleichungen der verlustfreien Strömung sind folgende (links stehen jeweils die Gleichungen des Gases, rechts die der Flachwasserströmung):

$$W\,dW + \frac{dp}{\varrho} = 0\,; \qquad W\,dW + \frac{d\left(\frac{g}{2}\zeta^2\right)}{\zeta} = 0 \qquad (\text{d. h. } W\,dW + g\,d\zeta = 0),$$

$$W^2 = 2\,g\,(i_0 - i)\,; \qquad W^2 = 2\,g\,(\zeta_0 - \zeta)\,.$$

$$\frac{\partial(\varrho\,u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\,v)}{\partial y} = 0\,; \qquad \frac{\partial(\zeta\,u)}{\partial x} + \frac{\partial(\zeta\,v)}{\partial y} = 0\,.$$

$W$ bedeutet hierbei den Betrag der Geschwindigkeit mit den Komponenten $u$ und $v$ (parallel zur Bodenfläche beim Wasser). Der Index 0 bezieht sich auf den Ruhezustand (z. B. $p_0$ = Kesseldruck, $\zeta_0$ = Stautiefe).

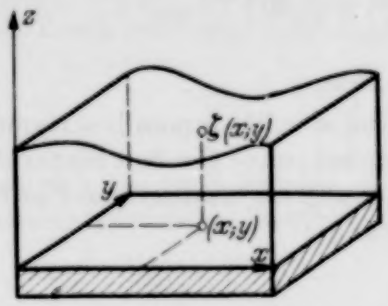



Abb. 1. Koordinatenbezeichnung.

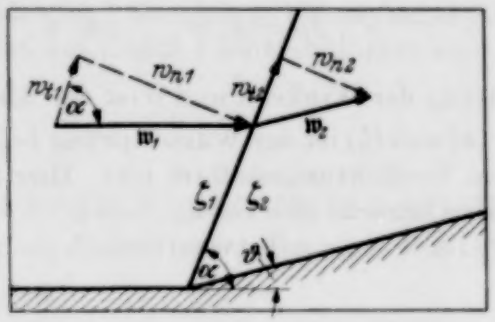



Abb. 2. Wassersprung (Verdichtungsstoß) an einer einspringenden Ecke.

**3. Strömung mit Verlusten.** Beim sogenannten schrägen Wassersprung bzw. Verdichtungsstoß, wie er etwa durch die Strömung in Umgebung einer konkaven Ecke oder durch Anströmung einer angestellten Platte realisiert ist, gelten folgende Beziehungen (Abb. 2, der Index 1 kennzeichnet Größen vor dem Wassersprung, der Index 2 solche hinter dem Wassersprung):

Kontinuitätsgleichung:

$$\varrho_1 W_1 = \varrho_2 W_2; \qquad \zeta_1 W_1 = \zeta_2 W_2; \tag{1}$$

Impulssatz parallel zur Stoßfront:

$$\varrho_1 W_{n_1} W_{t_1} = \varrho_2 W_{n_2} W_{t_2}\,; \qquad \zeta_1 W_{n_1} W_{t_1} = \zeta_2 W_{n_2} W_{t_2}\,; \tag{2}$$

Impulssatz senkrecht zur Stoßfront:

$$\varrho_1 W_{n_1}^2 + p_1 = \varrho_2 W_{n_2}^2 + p_2; \qquad \zeta_1 W_{n_1}^2 + \frac{g}{2}\zeta_1^2 = \zeta_2 W_{n_2}^2 + \frac{g}{2}\zeta_2^2\,. \tag{3}$$

Bis hierher hat man bei obigen Vernachlässigungen vollkommene Übereinstimmung zwischen den gasdynamischen und den Flachwassergleichungen. Daher entsprechen sich auch alle Beziehungen, die allein unter Benutzung von (1) bis (3) abgeleitet werden. Die wichtigsten davon werden nun tabellarisch zusammengestellt [1]. Mit den Abkürzungen

$$\Delta\varrho = \varrho_2 - \varrho_1\,, \qquad \Delta W_n = W_{n_2} - W_{n_1}\,, \qquad \Delta\zeta = \zeta_2 - \zeta_1\,,$$

$$\Delta p = p_2 - p_1\,, \qquad \Delta\left(\frac{g}{2}\zeta^2\right) = \frac{g}{2}\zeta_2^2 - \frac{g}{2}\zeta_1^2$$

ergibt sich für die Geschwindigkeitskomponenten $Wt$ parallel und $Wn$ senkrecht zum Wassersprung

$$W_{t_1} = W_{t_2}\,, \qquad W_{t_1} = W_{t_2}\,,$$

$$W_{n_1}^2 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{\Delta p}{\Delta\varrho}\,, \qquad W_{n_1}^2 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\frac{\Delta\left(\frac{g}{2}\zeta^2\right)}{\Delta\zeta}\,,$$

[1] Zur Herleitung der gasdynamischen Formeln vgl. *R. Sauer*, Theoretische Einführung in die Gasdynamik. Berlin 1943; die der Flachwasserformeln verläuft analog.

$$W_{n_2}^2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\frac{\Delta p}{\Delta \varrho}, \qquad W_{n_2}^2 = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\frac{\Delta\left(\frac{g}{2}\zeta^2\right)}{\Delta\zeta},$$

$$W_{n_1} W_{n_2} = \frac{\Delta p}{\Delta \varrho}, \qquad W_{n_1} W_{n_2} = \frac{\Delta\left(\frac{g}{2}\zeta^2\right)}{\Delta\zeta},$$

für die Schall- bzw. Grundwellengeschwindigkeit $c$

$$c^2 = \frac{dp}{d\varrho}, \qquad c^2 = \frac{d\left(\frac{g}{2}\zeta^2\right)}{d\zeta} = g\,\zeta.$$

Ferner ist

$$-\Delta p = \varrho_1 W_{n_1}\,\Delta W_n \qquad -\Delta\left(\frac{g}{2}\zeta^2\right) = \zeta_1 W_{n_1}\,\Delta W_n,$$

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha-\vartheta)}, \qquad \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha-\vartheta)}, \tag{4}$$

$$\Delta p = \varrho_1 W_1^2 \frac{\Delta\varrho}{\varrho_2}\sin^2\alpha, \qquad \Delta\left(\frac{g}{2}\zeta^2\right) = \zeta_1 W_1^2 \frac{\Delta\zeta}{\zeta_2}\sin^2\alpha. \tag{5}$$

Die Bedeutung der Winkel $\alpha$ und $\vartheta$ ist der Abb. 2 zu entnehmen.

Durch (4) und (5) ist der Wassersprung bei bekantem $\zeta_1$ und $\vartheta$ vollkommen bestimmt. Dies ist anders beim Verdichtungsstoß im Gas. Hier hat man drei unbekannte Größen hinter dem Stoß: $\alpha$, $\varrho_2$, $p_2$. Man braucht also für das Gas noch eine dritte Gleichung zur eindeutigen Festlegung des Stoßes. Da im Wasser selbstverständlich die triviale Identität

$$\frac{\frac{1}{2}g\zeta_1^2}{\frac{1}{2}g\zeta_2^2} = \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)^2$$

gilt, erhielte man dann völlige Übereinstimmung zwischen Verdichtungsstoß und Wassersprung, wenn die entsprechende (hier nicht triviale) Beziehung auch beim Gas gälte, also die Adiabatengleichung mit $K = 2$:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2.$$

Die Annahme der Gültigkeit der Adiabatengleichung durch den Verdichtungsstoß hindurch ist aber physikalisch nicht zulässig. An die Stelle der Adiabatengleichung tritt die Energiegleichung

$$i_1 + \frac{W_{n_1}^2}{2g} = i_2 + \frac{W_{n_2}^2}{2g}. \tag{6}$$

(Die entsprechende Gleichung für Wasser, also

$$\zeta_1 + \frac{W_{n_1}^2}{2g} = \zeta_2 + \frac{W_{n_2}^2}{2g}$$

kann nicht gelten, da sie im Widerspruch zu (1) bis (3) steht.)

Alle Ergebnisse, die man unter Benutzung von (6) für den Verdichtungsstoß herleitet, unterscheiden sich von den analogen für Wasser (erste Gruppe von Abweichungen). Da die Kenntnis der Abweichung von Bedeutung für die quantitative Auswertung der Experimente ist, werden die beiden wichtigsten voneinander abweichenden Beziehungen angegeben:

$$\Delta p = K\frac{p_1+p_2}{\varrho_1+\varrho_2}, \qquad \frac{\Delta\left(\frac{1}{2}g\zeta^2\right)}{\Delta\zeta} = 2\,\frac{\frac{1}{2}g\zeta_1^2 + \frac{1}{2}g\zeta_2^2 - \frac{1}{2}g\cdot\frac{(\Delta\zeta)^2}{2}}{\zeta_1+\zeta_2},$$

$$\left.\begin{aligned} i_{01} &= i_{02}\,; \\ \Theta_{01} &= \Theta_{02}\,; \\ \frac{p_{01}}{\varrho_{01}} &= \frac{p_{02}}{\varrho_{02}} \end{aligned}\right\} \quad \zeta_{02} = \zeta_{01} - \frac{(\Delta\zeta)^3}{4}\frac{1}{\zeta_1\zeta_2}.$$

Für spätere Anwendung soll die letzte Gleichung umgeformt werden: Je Zeit- und Längeneinheit

(in Richtung der Schwallfront) durchquert den Wassersprung die Wassermasse [1]

$$m = \varrho\, W_{n_1}\, \zeta_1 .$$

Diese verliert hierbei die Energie

$$\Delta E = m\, g\, (\zeta_{01} - \zeta_{02}) ,$$

also gilt

$$\frac{dE}{dt} = \varrho\, W_{n_1}\, g\, \frac{(\Delta\zeta)^3}{4\,\zeta_2} . \tag{7}$$

(Energiedissipation je Zeit- und Längeneinheit des Wassersprungs). Wie sich die Abweichung zwischen Verdichtungsstoß und Wassersprung in den Stoßpolaren für beide Fälle äußert, kann man der oben zitierten Arbeit von *Preisweerk* entnehmen.

**4. Einfluß von Bodenreibung und Oberflächenspannung.** Wir beschränken uns nun auf den senkrecht in ruhendes Wasser hineinlaufenden Schwall. Schräge Schwalle erhält man (ebenso wie schräge Verdichtungsstöße im Gas) wegen der Beziehung $W_{t_1} = W_{t_2}$ durch einfache Überlagerung einer Strömung parallel zur Schwallfront.

a) Bodenreibung. Zur Einführung der Bodenreibung schreibt man den Impulssatz für eine quaderförmige, von der Bodenfläche bis zur Wasseroberfläche reichende Flüssigkeitssäule von der Länge $dx$ in Fortschreitungsrichtung des Schwalls und der Breite 1 senkrecht dazu an:

$$\left[\frac{d}{dx}\int_0^\zeta (\varrho\, u^2 + p)\, dz\right] dx - \tau\, dx = 0 .$$

Hier bedeutet $p$ wie im folgenden den statischen Druck im Wasser, $\tau$ die Bodenschubspannung Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{d}{dx}\int_0^\zeta u\, dx = 0 .$$

Nach Einführung der Mittelwerte

$$\overline{u} = \frac{1}{\zeta}\int_0^\zeta u\, dz \qquad \text{und} \qquad \overline{u} = \sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{\frac{1}{\zeta}\int_0^\zeta u^2\, dz}$$

erhält man unter der Annahme, daß man $\overline{u} = k\,\overline{u}$ mit konstantem $k$ setzen darf (dies gilt nur dann streng, wenn sich das Geschwindigkeitsprofil $u(z)$ in Abhängigkeit von $x$ affin verändert), und bei Benutzung der Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\overline{u} = W_1 \frac{\zeta_1}{\zeta}$$

die Gleichung

$$\frac{d\zeta}{dx}\left(1 - \frac{a^3}{\zeta^3}\right) = \frac{\tau}{\varrho\, g}\,\frac{1}{\zeta} \tag{8}$$

mit der Abkürzung $a^3 = W_1^2\,\zeta_1^2/g$ (cm³). Da $\zeta_1$ die Tiefe des ungestörten, ruhenden Wassers bedeutet, hat $W_1$ die Bedeutung der Schwallgeschwindigkeit.

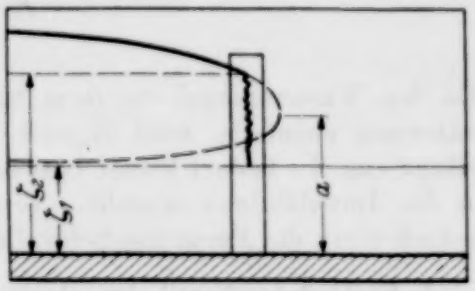


Abb. 3. Wasserschwall bei Berücksichtigung der Bodenreibung.

Macht man die selbstverständliche Annahme, daß die Bodenschubspannung $\tau$ der Relativgeschwindigkeit zwischen Wasser und Bodenfläche entgegengerichtet ist, und mit dieser gegen Null geht, so ergeben sich aus (8) Lösungen von einem in Abb. 3 skizzierten Typ. Da die Lösung bei $\zeta = a$ eine vertikale Tangente bekommt, und da nach Definition von $a$ die Beziehung $\zeta_1 \leq a$ gilt (es ist nämlich $\zeta_1 \leq W_1^2/g$), folgt, daß der Schwall auch bei (alleiniger) Berücksichtigung der Bodenreibung eine Unstetigkeit ausbilden muß. Diese muß dann in der aus Abb. 3 ersichtlichen Weise verlaufen, wie aus Anwendung des Impulssatzes auf das schraffierte Kontrollgebiet folgt. Wählt man nämlich dieses Gebiet genügend schmal, so fällt die Bodenreibung ganz aus der Impulsbilanz heraus, die damit dasselbe Ergebnis wie im reibungsfreien Fall liefert. Man kann das Ergebnis kurz so zusammenfassen: Die Bodenreibung allein kann das unstetige Schwallprofil nicht abrunden und gerade deshalb ändert sich an der Impulsbilanz und damit an den in Abschnitt **3** gegebenen Beziehungen nichts. Die Änderung gegenüber den reibungsfreien Verhältnissen besteht in einem schwachen, stetigen Anstieg des Wasserspiegels hinter dem Schwall.

[1] $\varrho$ bedeutet von hier ab die Dichte des Wassers (auf die Gleichungen des Gases wird nicht mehr zurückgegriffen werden).

Allerdings muß berücksichtigt werden, daß andere Einflüsse die Ausbildung einer unstetigen Schwallfront verhindern können, so daß man für die Impulsbilanz das Kontrollgebiet nicht mehr unendlich schmal wählen darf und somit auch die Bodenreibung berücksichtigen muß. (Die Wasserhöhen $\zeta_1$ und $\zeta_2$ sind bei einem Schwall mit stetigem Profil natürlich weit genug vor und hinter dem Schwall zu nehmen.) Man kann sich aber davon überzeugen, daß die Bodenreibung so klein ist, daß sie auch in diesen Fällen vernachlässigt werden kann. Um einen Überblick über die Größe der Bodenschubspannung und damit auch der Spiegelneigung hinter dem Schwall zu bekommen, wurde nach dem *Pohlhausen*verfahren die Grenzschicht berechnet, wie sie sich hinter einem in ruhendes Wasser hineinlaufenden Schwall ausbildet. Führt man die Schwallstärke $k = \zeta_2/\zeta_1$ ein, so ergibt sich

bei laminarer Grenzschicht:

$$\frac{\tau}{\varrho W_2^2} = \frac{1}{\sqrt{Re}}(1-k)\sqrt{\frac{3k+2}{15}}$$

bei turbulenter Grenzschicht:

$$\frac{\tau}{\varrho W_2^2} = \frac{0{,}023}{\sqrt[5]{Re}}(1-k)^{1{,}15}\left(k+\frac{7}{2}\right)^{4/5} \qquad \text{mit} \qquad Re = \frac{W_2\, x}{\nu}.$$

($x$ = Entfernung von der Schwallfront; $\nu = 0{,}01\ \mathrm{cm^2/s}$ = kinematische Zähigkeit des Wassers). Diese Formeln gelten eigentlich nur für Schwalle mit unstetigem Beginn, können jedoch näherungsweise auch auf Schwalle mit stetigem Profil übertragen werden. In allen praktisch interessierenden Fällen kann man die mit diesen Schubspannungen aus (8) berechneten Spiegelneigungen hinter dem Schwall vernachlässigen, der Wasserspiegel hinter dem Schwall ist praktisch waagerecht.

b) O b e r f l ä c h e n s p a n n u n g. Auch die Oberflächenspannung hat keinen wesentlichen Einfluß auf die in Abschnitt 3 gegebenen Beziehungen. Berechnet man nämlich die von der Oberflächenspannung $T$ herrührende horizontale Kraftkomponente auf das in Abb. 4 skizzierte Kontrollgebiet, so ergibt sich

$$dK_x = -T\frac{\zeta''\,d\zeta}{\sqrt{1+\zeta'^2}^3},$$

also

$$K_x = -\int_{x_1}^{x_2} dK_x = +T\frac{1}{\sqrt{1+\zeta'^2}}\Bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

Da der Wasserspiegel vor dem Schwall waagerecht ist und hinter dem Schwall in guter Annäherung ebenfalls, wird $K_x = 0$. Die Oberflächenspannung geht daher nicht in die Impulsbilanz ein. Es bedarf keiner besonderen Erörterung, daß auch die Vertikalgeschwindigkeit nicht in die Impulsbilanz eingeht. Vertikalgeschwindigkeit und Oberflächenspannung beeinflussen jedoch stark die Form des Schwallprofils.

**5. Einfluß der Vertikalgeschwindigkeit, Einzelwelle.** Es bleiben nun noch die beiden wichtigsten, eingangs aufgeworfenen Fragen zu beantworten übrig, nämlich:

1. Wieso bleibt die Wasseroberfläche in manchen Fällen zusammenhängend und warum zerreißt sie manchmal?

2. Wie kann man die Entstehung einer stetigen Erhöhung vor dem Schwall in tiefem Wasser und ihr Fehlen in flachem Wasser verstehen?

In diesem Abschnitt wird zunächst vorausgesetzt, daß die Wasseroberfläche zusammenhängend bleibt, und unter dieser Voraussetzung Frage 2 beantwortet, während die Bedingungen für die Gültigkeit dieser Voraussetzung erst im nächsten Abschnitt erörtert werden. — Die experimentellen Ergebnisse (Abschnitt 8) sowie frühere Untersuchungen der sogenannten Einzelwelle (= Welle, die aus einem einzigen Wellenberg besteht) haben nahegelegt, die Ursache der allmählichen, stetigen Erhöhung vor dem Schwall in der Vertikalgeschwindigkeit zu suchen und zu der Vorstellung geführt, daß diese Erhöhung mit guter Näherung dem ansteigenden Teil einer Einzelwelle bis zu deren Wendepunkt entspricht (vgl. Abb. 5). Daß die Wasseroberfläche beim Schwall nicht wie bei der Einzelwelle nach Erreichen eines Maximums wieder absinkt, hat seine Ursache darin, daß der Schwall im Gegensatz zur Einzelwelle ein Energie dissipierender Vorgang ist. Man darf daher (und dem entspricht die soeben ausgesprochene Annahme) nur voraussetzen,

daß in einiger Entfernung vor dem Schwall die Verhältnisse in bezug auf die Wirkung der Vertikalgeschwindigkeit denen im Vordergebiet einer Einzelwelle entsprechen, die mit derselben Geschwindigkeit wie der Schwall wandert.

Eine Untersuchung der Eigenschaften einer Einzelwelle unter der Wirkung der Oberflächenspannung des Wassers findet sich in einer Veröffentlichung von *Harrison*[1]. Da die Theorie dieser Welle von ausschlaggebender Bedeutung für die erwähnten Beobachtungstatsachen ist, soll sie hier in einer von der *Harrison*schen Darstellung abweichenden Form noch einmal gegeben werden. Ausgangspunkt sind die *Euler*schen Gleichungen. Da nach einer weiter oben getroffenen Vereinbarung nur zweidimensionale Vorgänge (d. h. ebene Wellen) betrachtet werden, entfällt die Abhängigkeit von der $y$-Koordinate. (Über die Bezeichnung der Koordinaten vgl. Abb. 1; $w$ ist die Komponente der Geschwindigkeit in vertikaler Richtung.) Man hat

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{9a}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}-g; \tag{9b}$$

**Kontinuität:**
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{10a}$$

**Wirbelfreiheit:**
$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0, \tag{10b}$$

**Randbedingungen:**
$$w(z=0)=0, \qquad p(z=\zeta)=-T\zeta''. \tag{11a, b}$$

(Hierbei ist $1+\zeta'^2\approx 1$ gesetzt.)

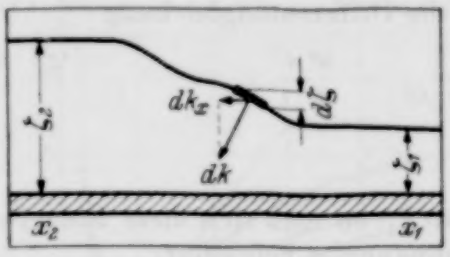



Abb. 4. Einwirkung der Oberflächenspannung.

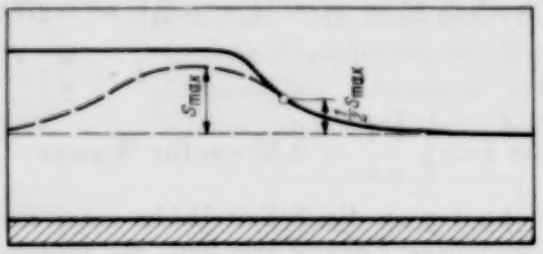



Abb. 5. Anschluß des Einzelwellengebietes an den Schwall.

Man setzt $u$ und $w$ als Potenzreihen in folgender Form an:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\,z^n, \tag{12a}$$

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x)\,z^n. \tag{12b}$$

Setzt man nun in (10a) und (10b) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\left.\begin{aligned} u_1&=0,\\ n\,u_n&=+\frac{dw_{n-1}}{dx},\\ n\,w_n&=-\frac{du_{n-1}}{dx}\end{aligned}\right| \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Hieraus können die $u_n$ und $w_n$ durch die Ableitungen von $u_0$ ausgedrückt werden. Einsetzen der $u_n$ und $w_n$ in die Reihen (12) ergibt

$$u=u_0-\frac{z^2}{2!}\frac{d^2u_0}{dx^2}+\frac{z^4}{4!}\frac{d^4u_0}{dx^4}-\cdots, \tag{13a}$$

$$w=-\frac{du_0}{dx}z+\frac{1}{3!}\frac{d^3u_0}{dx^3}z^3-\cdots, \tag{13b}$$

was übrigens folgende Schreibweise zuläßt:

$$u-i\,w=\left\{e^{+i\,z\,d/dx}\right\}\,u_0(x),$$

[1] *W. J. Harrison*, Proc. Lond. Math. Soc. 7 (1909), S. 107.

wobei $\{\ldots\}$ einen auf $u_0(x)$ anzuwendenden Differentialoperator bedeutet. Mit (13a) und (13b) geht man in (9a) und (9b) ein. Berücksichtigt man nur die Glieder bis $z^0$, so erhält man die Gleichungen von Abschnitt 2. Berücksichtigung von Gliedern bis $z^3$ liefert

$$u_0 \frac{du_0}{dx} + \left[\frac{1}{2}\frac{d^2u_0}{dx^2}\frac{du_0}{dx} - \frac{d^3u_0}{dx^3}u_0\right] z^2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{14a}$$

$$\left[\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 - \frac{d^2u_0}{dx^2}u_0\right] z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - g. \tag{14b}$$

Integration von (14b) über $z$ von $z=0$ bis $z=\zeta$ liefert bei Beachtung von (11b)

$$\zeta^2 \cdot \frac{1}{2}\left[\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 - \frac{d^2u_0}{dx^2}u_0\right] = +\frac{1}{\varrho}[T\zeta'' + p_{z=0}] - g\zeta.$$

Man nimmt nun an, daß $|\zeta - \zeta_1| \ll \zeta_1$, wobei $\zeta_1$ die Spiegelhöhe des ungestörten Wassers bedeutet, und erhält durch Differentiation nach $x$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{z=0} = -\frac{\zeta_1^2}{2}\left[\frac{d^3u_0}{dx^3}u_0 - \frac{d^2u_0}{dx^2}\frac{du_0}{dx}\right] + g\zeta' - \frac{T}{\varrho}\zeta'''.$$

Dies setzt man in (14a) für $z=0$ ein und befriedigt außerdem die Kontinuitätsgleichung näherungsweise durch den Ansatz

$$u_0 = W\frac{1}{\zeta_1 + s}$$

$s = \zeta - \zeta_1 =$ Erhebung über den ungestörten Wasserspiegel). Setzt man dann in $d^2u_0/dx^2$ und $d^3u_0/dx^3$ noch $\zeta_1/(\zeta_1+s) \approx (1 - s/\zeta_1)$, so ergibt sich für $s$ die Differentialgleichung

$$\frac{a^3}{(\zeta_1+s)^3} = 1 + \frac{a^3}{2}\left[\frac{s'''/s'}{\zeta_1+s} + \frac{s''}{(\zeta_1+s)^2}\right] - \frac{b^2}{2}\frac{s'''}{s'}. \tag{15}$$

Hierbei ist $b = \sqrt{\dfrac{2T}{\varrho g}} = 0{,}38$ cm für Wasser.

Bezeichnet man die Scheitelhöhe einer Einzelwelle mit $\zeta_2$, so muß sich diese Einzelwelle aus (15) als diejenige Lösung ergeben, die folgende Randbedingungen befriedigt:

$$s' = s'' = 0 \qquad \text{für} \qquad s = 0, \tag{16a}$$

$$s' = 0 \qquad \text{für} \qquad s = \zeta_2 - \zeta_1. \tag{16b}$$

Durch die Substitution $s'^2/2 = \varphi(s)$, also $s'' = d\varphi(s)/ds$, $s'''/s' = d^2\varphi(s)/ds^2$ geht (15) in eine lineare Gleichung für $\varphi$ über. Für $\varphi$ kann man ansetzen:

$$\varphi(s) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n s^n,$$

wobei es genügt, von der Reihe die beiden ersten Glieder zu berücksichtigen. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (15) für $\varphi$ findet man

$$a_2 = \frac{1}{\zeta_1^2}\frac{a^3 - \zeta_1^3}{a^3 - b^2\zeta_1}, \qquad a_3 = -\frac{1}{\zeta_1^3}\frac{a^3}{a^3 - b^2\zeta_1}.$$

Aus (16b) folgt dann für den Parameter $a$

$$a^3 = \frac{\zeta_1^4}{2\zeta_1 - \zeta_2}.$$

Nach der Definition von $a$ ergibt sich hieraus die Wellengeschwindigkeit (mit der Vernachlässigung $|\zeta_2 - \zeta_1| \ll \zeta_1$) zu

$$W = \sqrt{g\zeta_2}.$$

Das heißt: die Geschwindigkeit der Einzelwelle ist unabhängig von der Oberflächenspannung gleich der Grundwellengeschwindigkeit in ihrem Scheitelpunkt. Die Oberflächenspannung hat nur Einfluß auf das Profil der Welle. Dieses wird durch die Gleichung

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{2s^2}{\zeta_1^2 - b^2}\left[\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1\right) - \frac{s}{\zeta_1}\right] \tag{17}$$

gegeben. Da nur reelles $ds/dx$ in Frage kommt, muß die rechte Seite größer als Null sein.

**Fall I:** $\zeta_1^2 < b^2$; in diesem Falle muß $(\zeta_2/\zeta_1 - 1) - s/\zeta_1 < 0$ sein, oder $\zeta_2 < \zeta_1$ d. h.: wenn die Wassertiefe kleiner ist als $b = 0{,}38$ cm, ist nur ein Einzelwellental möglich; Auf dieselbe Art erkennt man:

**Fall II:** Wenn die Wassertiefe größer ist als 0,38 cm, ist nur ein Einzelwellenberg möglich.

Es wird hervorgehoben, daß ohne Berücksichtigung der Vertikalgeschwindigkeit die Erscheinung der Einzelwelle nicht zu verstehen ist. Dies gilt zum mindesten für Einzelwellenberge, also in Wassertiefen $> 0{,}38$ cm. Für flaches Wasser haben weitergehende Untersuchungen nahegelegt, daß sich Einzelwellentäler auch unter alleiniger Wirkung der Oberflächenspannung verstehen lassen, wie überhaupt in Wasser so geringer Tiefe die Wirkungen der Vertikalgeschwindigkeit immer mehr gegenüber denen der Oberflächenspannung vernachlässigt werden können.

Die Integration von (17) ergibt

$$s = \frac{s_{max}}{\mathfrak{Cof}^2 \sqrt{\frac{s_{max}\,(x - x_0)^2}{2\,\zeta_1\,(\zeta_1^2 - b^2)}}}$$

($x_0$ = Abszisse des Wellenscheitelpunktes). Diese Gleichung stimmt mit dem Ergebnis von *Boussinesq* und *Rayleigh* überein, die allerdings die Oberflächenspannung vernachlässigen und somit die Vertikalgeschwindigkeit allein berücksichtigen, abgesehen von einem Faktor $\sqrt{3/2}$ im Argument des $\mathfrak{Cof}$. Diese Diskrepanz liegt in der Verschiedenheit der Näherungsmethoden begründet. — Der Wendepunkt der Einzelwelle liegt immer in halber Scheitelhöhe. In der Nähe der kritischen Wassertiefe $b$ sind die Einzelwellen sehr steil. Physikalische Überlegungen an Hand der Dispersionskurven (Abb. 6) legen für die kritische Wassertiefe den Wert $\sqrt{3/2}\,b = 0{,}5$ cm nahe, wie er sich auch bei Benutzung der Rayleighschen Rechenmethode ergeben hätte.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß man aus (15) bei geeigneter Abänderung der Randbedingungen (16) Lösungen erhält, die Wellen von endlicher Länge entsprechen. Um einen Überblick über den Gültigkeitsbereich dieser Lösungen zu erhalten, wurde (17) durch Spezialisierung auf (im Grenzfall) unendlich kleine Amplituden linearisiert. (Die Rechnungen werden hier übergangen.) Man erhält dann eine Beziehung zwischen Wellenlänge $\lambda$, Wellengeschwindigkeit $W$ und Wassertiefe $\zeta_1$, die mit der exakten, aus potentialtheoretischen Überlegungen bekannten Dispersionsformel verglichen werden kann. Diese exakte Formel ist

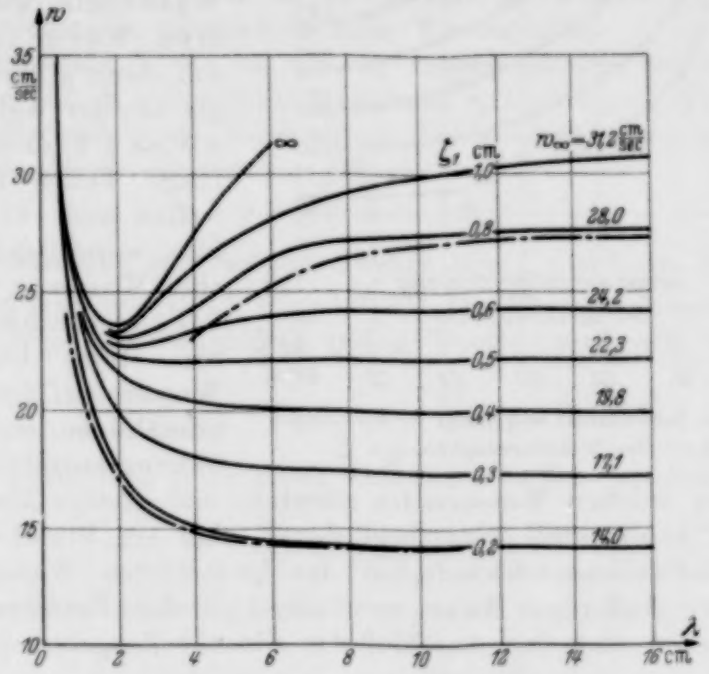



Abb. 6. Dispersionskurven für Wasserwellen. Näherung strichpunktiert.

Abb. 7. Profil von Wasserwellen für konstante Wellenlänge bei verschiedenen Wassertiefen (Voraussetzung: Wellenlänge > 1,73 cm).

$$W^2 = g\left[\frac{b^2\pi}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\pi}\right]\mathfrak{Tg}\,2\pi\frac{\zeta_1}{\lambda},$$

die Näherungsformel

$$W^2 = g\,\zeta_1\,\frac{4\pi^2 b^2 + 2\lambda^2}{4\pi^2\zeta_1^2 + 2\lambda^2}.$$

In Abb. 6 sind beide Formeln graphisch dargestellt. Die Näherung ist für große Wassertiefen und kleine Wellenlängen verhältnismäßig gut. Wellen mit $dW/d\lambda > 0$ nennt man gewöhnlich Schwere-

wellen, mit $dW/d\lambda < 0$ Kapillarwellen. Es ist wichtig, hier zu bemerken, daß Oberflächenwellen auf Wasser sich in ganz anderer Weise ausbreiten als Wellen in einem Gas, denn im Gas wandern die Wellen unabhängig von ihrer Wellenlänge mit Schallgeschwindigkeit, während bei Wasserwellen die Geschwindigkeit in der angegebenen Weise von der Wellenlänge abhängt. Dies hat u. a. zur Folge, daß man bei einer Flachwasserströmung nicht in genau analoger Weise wie bei der Gasströmung durch Winkelmessung an einem von einer punktförmigen Störung ausgehenden Wellensystem die *Mach*sche Zahl der Strömung bestimmen kann, wie dies verschiedentlich geschehen ist.

Das Profil von Schwere- und Kapillarwellen unterscheidet sich in charakteristischer Weise, wie Abb. 7 zeigt, wo das Wellenprofil für konstantbleibende Wellenlänge in abnehmender Wassertiefe skizziert ist. Man erkennt, daß Schwerewellen steile Berge und flache, breite Täler aufweisen, Kapillarwellen umgekehrt. Wird die Wellenlänge größer, so werden bei den Schwerewellen die Täler breiter und flacher, bis im Grenzfall unendlich großer Wellenlänge nur noch ein Einzelwellenberg übrig bleibt. Bei den Kapillarwellen bleibt im gleichen Grenzfall das Einzelwellental. Hierzu ist allerdings Voraussetzung, daß die Wassertiefe, kleiner als etwa 0,4 cm ist, denn nur dann gilt unabhängig von der Wellenlänge $dW/d\lambda < 0$, so daß auch lange Wellen Kapillarwellen sind. Es ist nun klar, warum sich in flachem Wasser ($< 0{,}38$ cm) vor einem Schwall auch bei stetig bleibender Wasseroberfläche keine allmähliche, stetige Erhöhung ausbilden kann,

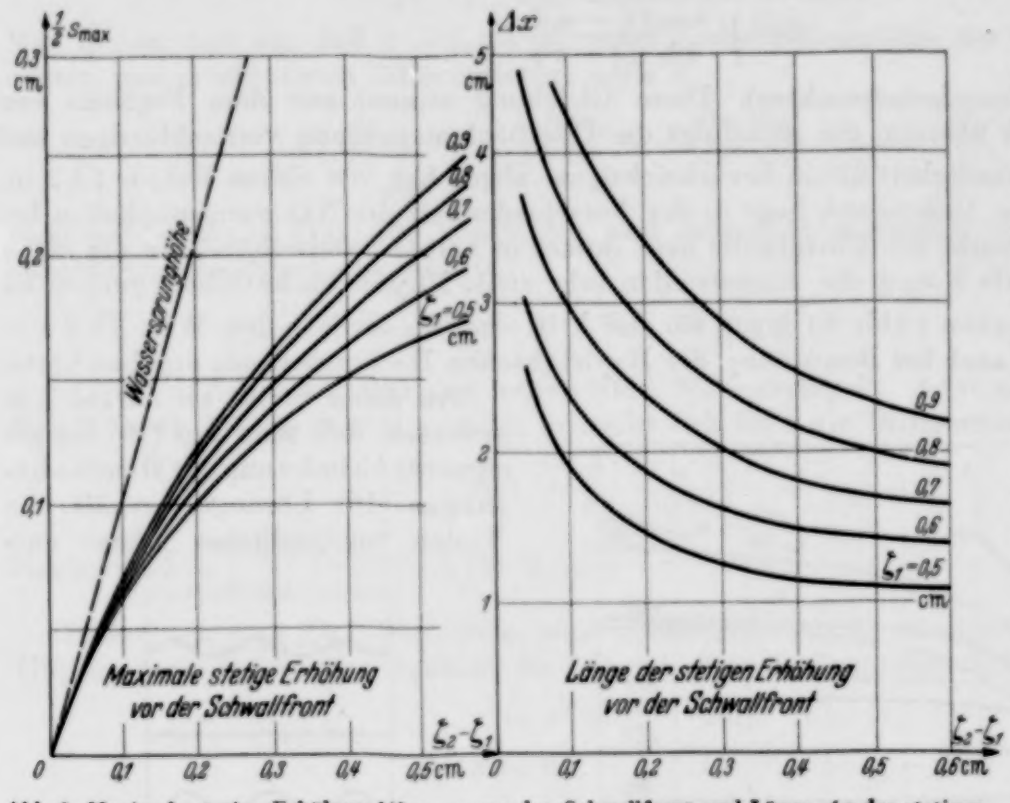



Abb. 8. Maximale stetige Erhöhung $1/2\ s_{max}$ vor der Schwallfront und Länge $\Delta x$ der stetigen Erhöhung bis zum Abklingen auf 1/10 als Funktion der Wassersprunghöhe $\zeta_2 - \zeta_1$.

denn nach obigen Ergebnissen wäre in solchen Wassertiefen allenfalls eine stetige Absenkung zu erwarten. Daß eine solche nicht beobachtet wird, liegt daran, daß ein Einzelwellental langsamer wandert als es der Grundwellengeschwindigkeit des ungestörten Wassers entspricht, ein Schwall dagegen schneller. Außerdem kann man im Fall des Einzelwellentals keine vernünftige Annahme mehr machen über den Anschluß des Einzelwellengebietes an den Schwall.

Geht man von der zu Beginn des Abschnitts gemachten Annahme über den Anschluß des Einzelwellengebietes an den Schwall aus, so ergibt sich für die maximale allmähliche Erhebung vor dem Schwall (Wassertiefe $> 0{,}38$ cm)

$$s = \frac{s_{max}}{2} = \frac{\zeta_1}{2}\left(\frac{W^2}{g\,\zeta_1} - 1\right). \tag{18a}$$

Vernachlässigt man die Oberflächenspannung, so berechnet man, daß diese stetige Erhöhung in einer Entfernung

$$\Delta x = \frac{2{,}6}{\sqrt{\dfrac{W^2}{g\,\zeta_1} - 1}}\,\zeta_1 \tag{18b}$$

auf 1/10 ihres ursprünglichen Wertes abgeklungen ist. In Wassertiefen die kleiner als etwa 0,5 cm sind, muß man die Oberflächenspannung berücksichtigen. Die Formeln (18a) und (18b) verlieren dann ihren Sinn. In Abb. 8 sind $1/2\ s_{max}$ und $\Delta x$ als Funktionen der Wasserschwallhöhe mit $\zeta_1$ als Parameter aufgetragen.

**6. Kapillarwellen.** Es bleibt nun noch die zu Beginn des vorigen Abschnittes zuerst aufgeworfenen Frage zu lösen, die in folgender Weise präzisiert werden kann: Wie kann im Schwall Energie dissipiert werden ohne Bildung einer Wasserwalze (= turbulente Durchmischungszone)? Die Beantwortung ergibt sich aus der Tatsache, daß vor allen beobachteten Wasserschwallen ein System von Kapillarwellen mit zur Schwallfront paralleler Wellenfront herläuft. Diese Kapillarwellen überlagern sich erfahrungsgemäß der allmählichen stetigen Erhöhung (falls diese vorhanden) ohne sie wesentlich zu stören. Die Phasengeschwindigkeit der Wellen ist der Schwallgeschwindigkeit gleich und somit immer größer als die Grundwellengeschwindigkeit. Ein Blick auf Abb. 6 ergibt dann, daß die der Schwallfront vorgelagerten Wellen sich stets im Gebiet $dW/d\lambda < 0$ befinden, daß also ihre Gruppengeschwindigkeit größer ist als ihre Phasengeschwindigkeit. Hieraus folgt, daß der Kopf der Wellengruppe schneller wandert als die Phase und somit dem Wasserschwall vorauseilt, wie es Abb. 9 zu verschiedenen Zeiten zeigt. Dabei sind Reibungseinflüsse zunächst außer Betracht gelassen. Dem Wellensystem muß ständig Energie zugeführt werden, da es sich mit der Zeit über eine immer größer werdende Wasserfläche ausbreitet. Diese Energie wird vom Schwall geliefert. Bei stärker werdendem Schwall müssen die Amplituden der Kapillarwellen immer größer werden, wenn das Wellensystem die ganze vom Schwall kommende Energie (oder doch den größten Teil) noch aufnehmen soll. Erfahrungsgemäß sind diese Amplituden aber beschränkt, und man sieht daher ein, daß von einer bestimmten Schwallstärke an die Energie auf andere Weise verzehrt werden muß, nämlich in einer Wasserwalze.

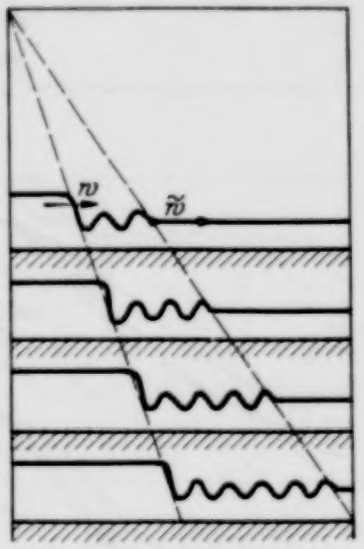


Abb. 9. Zeitliche Ausbildung des Kapillarwellensystems vor einem Schwall.

Auf folgende Weise kann man ausgehend von diesen Vorstellungen die Kapillarwellenamplitude $s_0$ berechnen: Man setzt die Kapillarwellen als harmonische Schwingungen an (nur für sehr kleine Amplituden streng gültig):

$$s = s_0 \cos(k\,x - \omega\,t)\,.$$

Bei Beschränkung auf Tiefwasserwellen (für $\zeta > 0{,}4$ cm, $\lambda < 0{,}6$ cm sicher zulässig) gilt für die Gruppengeschwindigkeit[1] $\tilde{W} = 3/2\ W$. Die Energie unseres Wellensystems wird für eine Fläche von der Länge 1 in $x$-Richtung und der Breite 1 senkrecht dazu[2]

$$E = \frac{1}{2}\varrho\,k\,W^2\,s_0^2\,.$$

Je Längeneinheit in $y$-Richtung wird daher in der Zeiteinheit die Energie

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\varrho\,k\,W^2\,s_0^2(\tilde{W} - W) = \frac{1}{4}\varrho\,k\,W^3\,s_0^2$$

abtransportiert. Diesen Ausdruck vergleicht man nun mit (7) und erhält

$$s_0^2 = \frac{g}{k\,W^2}\frac{(\Delta\zeta)^3}{\zeta_2}\varepsilon\,. \tag{19}$$

Hierbei wurde $\varepsilon < 1$ eingeführt, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß ein Teil der Energie ja wohl schon im eigentlichen Schwall vernichtet wird. Experimente haben ergeben, $0{,}6 \leq \varepsilon \leq 0{,}9$; die aus (19) berechneten Amplituden stimmen dann gut mit der Beobachtung überein.

Diese Übereinstimmung bleibt auch dann erhalten, wenn man die innere Reibung berücksichtigt, die sich natürlich darin äußert, daß die Wellenamplitude mit größer werdender Entfernung vom Schwall abklingt. Ein bestimmter Teil der vom Schwall in das Wellensystem hineingelieferten Energie wird nämlich von der ersten Welle in Wärme umgewandelt und nur der Rest gelangt zur zweiten, in der sich der Vorgang wiederholt. Unter dieser Annahme ergibt sich ein Dämpfungsgesetz von der Form

$$\hat{s}_0 = s_0\,e^{-\frac{x}{\beta\lambda}}\,.$$

[1] *A. Sommerfeld*, Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. II, S. 180. Wiesbaden 1947.
[2] *H. Lamb*, Lehrbuch der Hydrodynamik. S. 707 2. dt. Auflage. Leipzig und Berlin 1931.

Die Größe $\beta$ kann auf folgende Weise berechnet werden. Man nimmt an, daß schon so lange Zeit seit Entstehung des Schwalls vergangen ist, daß sich der Kopf des Wellensystems in einem Gebiet befindet, in dem die Amplituden praktisch auf Null abgeklungen sind. Dann wird die ganze in das Wellensystem hineingeschickte Energie dort in Wärme verwandelt. Nach dem oben zitierten Lehrbuch von *Lamb* wird von einem Kapillarwellensystem von der Länge $dx$ in Fortschreitungsrichtung und der Breite 1 senkrecht dazu folgende Energie je Zeiteinheit dissipiert:

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{dE}{dt}\right) dx = 2\,\mu\,k^3\,W^2\,\hat{s}_0^2\,dx\,.$$

Die gesamte dissipierte Energie wird dann

$$\frac{dE}{dt} = 2\,\mu\,k^3\,W^2\,s_0^2 \int_{x=0}^{\infty} dx\,e^{-\frac{2x}{\beta\lambda}} = \mu\,k^2\,g\,\frac{(\Delta\zeta)^3}{\zeta_2}\,\varepsilon\,\lambda\,\beta\,.$$

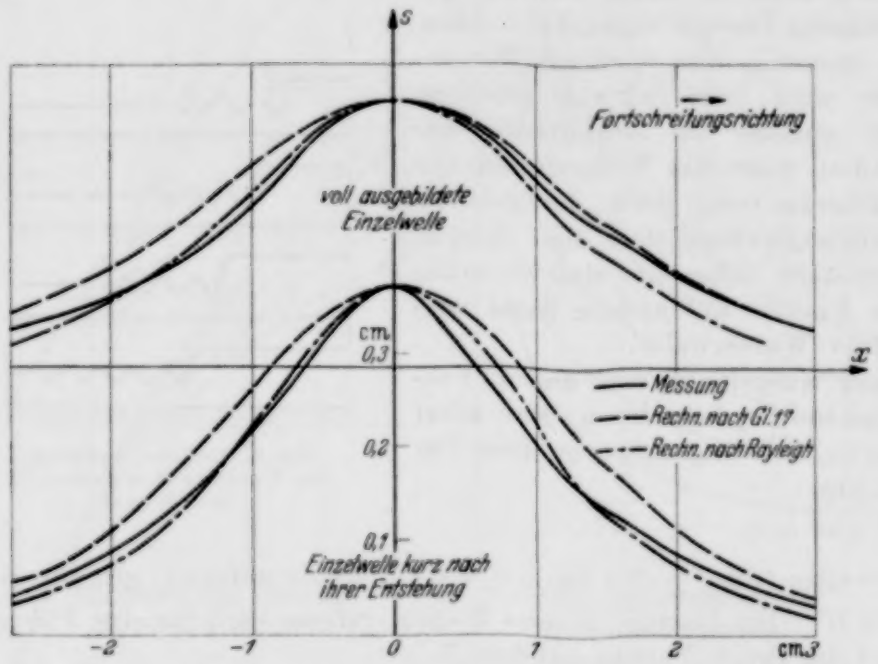



Abb. 10. Vergleich zweier beobachteter Einzelwellenprofile mit der Rechnung von *Rayleigh* und der Rechnung nach Gl. (17).

Durch Vergleich mit (7) erhält man

$$\beta = \frac{W\lambda}{16\,\pi^2\,\nu}$$

($\mu$ = Zähigkeit, $\nu$ = kinematische Zähigkeit). Die so berechneten $\beta$ stimmen mit den beobachteten gut überein, wenn man die Oberflächenspannung des Wassers etwas kleiner annimmt als dem Tabellenwert entspricht. Diese Verkleinerung läßt sich leicht auf Verunreinigung der Wasseroberfläche zurückführen [1].

**7. Experimentelle Ergebnisse.** Zur Bestätigung der diskutierten Vorstellungen werden die Profile einer großen Zahl von Schwallen, Einzelwellen und Wellensystemen bei Wassertiefen von 0,2 bis 1 cm vermessen. Im allgemeinen ergab sich gute Übereinstimmung mit der Theorie. Die Schwalle und Wellen wurden entweder dadurch erzeugt, daß der Wasserspiegel plötzlich durch aus einem Tank ausfließendes Wasser erhöht wurde, oder indem eine flache Leiste oder eine gegen die Bewegungsrichtung angestellte Platte durch das Wasser geschleppt wurde. Man erhält ein genaues Bild des Wellenprofils, indem man parallel zur Wasseroberfläche einen dünnen, von einer starken Lichtquelle angestrahlten Draht spannt und diesen und sein Spiegelbild in der durch die Wellen deformierten Wasseroberfläche photographiert. An Stelle des Drahtes kann man auch den genau gradlinigen unteren Rand einer gut reflektierenden Fläche benutzen. Gemessen wurden prinzipiell nur Längen. Wenn zum Vergleich mit der Theorie die Kenntnis von Geschwindigkeiten nötig war, so wurden diese aus Höhendifferenzen berechnet.

In Abb. 10 ist das gemessene Profil einer Einzelwelle mit dem Ergebnis von *Rayleigh* und *Boussinesq* (nach Korrektur durch die Oberflächenspannung) verglichen. Außerdem ist das gemäß (17) berechnete Wellenprofil eingezeichnet. In der ersten Zeit nach der Entstehung einer Einzelwelle ist ihr ein deutlich sichtbares System von Kapillarwellen überlagert. Diese stören jedoch das Wellenprofil nicht wesentlich und verschwinden bald durch innere Reibung. (Im Gegensatz zum Schwall liefert eine Einzelwelle ja keine Energie nach.) In Wassertiefen $< 0{,}3$ cm wurden in Übereinstimmung mit der Theorie keine Einzelwellenberge beobachtet. Daß auch keine gut ausgebildeten Einzelwellentäler beobachtet werden konnten, liegt daran, daß diese nie ganz von den unvermeidlichen Kapillarwellen endlicher Länge getrennt werden konnten und ebenso schnell wie diese durch Dämpfung verschwinden. Abb. 11e ist ein Beispiel für eine dem Einzelwellental nahekommende Erscheinung. Die Abb. 11a bis 11e zeigen eine Anzahl von Einzel-

[1] *G. Bakker*, Kapillarität und Oberflächenspannung. Hb. Exp. Phys. Bd. VI, S. 307. Leipzig 1928.

wellen, die Abb. 12a bis 12k mehrere Schwalle bzw. Übergangsformen zwischen Schwallen und Einzelwellen. In den Fällen, in denen nach der Theorie eine allmähliche, stetige Erhöhung zu erwarten war, ist diese gemäß den Gleichungen des Abschnitt 5 eingezeichnet. Bei allen Schwallen wurde fernerhin die vom Kapillarwellensystem dissipierte Energie berechnet. Wenn das Kapillarwellensystem gut ausgebildet ist, werden in ihm stets über 60% der gesamten Energie in Wärme verwandelt. Man erkennt an den Bildern gut die charakteristische Profilform der Kapillarwellen. Nach den Beobachtungen ist die Bildung einer Wasserwalze beim Schwall dann zu erwarten, wenn $\lambda/s_0 < 5$ wird.

**8. Zusammenfassung.** 1. Die Analogie zwischen Wassersprung und Verdichtungsstoß ist schon im Rahmen der „gasdynamischen Näherung" der Flachwassergleichungen nicht vollkommen, da das thermodynamische Verhalten in beiden Fällen verschieden ist (Abschnitt 3).

2. Die in Abschnitt 3 gegebenen Beziehungen zwischen der Geschwindigkeit eines Schwalls und den Wasserhöhen vor und hinter dem Schwall werden durch Bodenreibung, Oberflächenspannung und Vertikalgeschwindigkeit nicht oder doch nur sehr unwesentlich geändert (Abschnitt 4). Die Abweichungen gegenüber der Gasströmung bestehen vielmehr darin, daß die Profilform des Wasserschwalls im allgemeinen keine exakte Unstetigkeit aufweist.

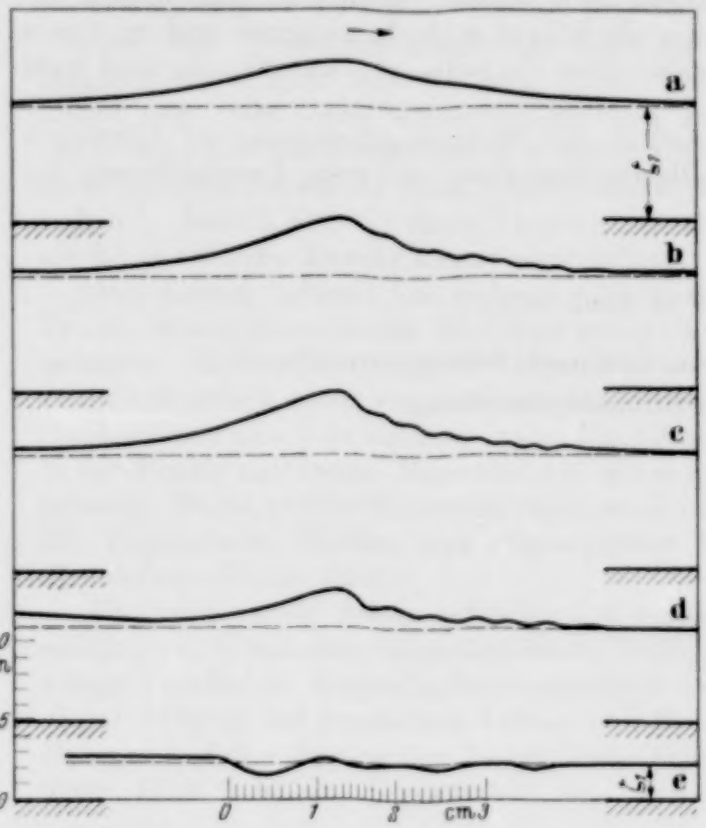



Abb. 11. Beobachtete Einzelwellen verschiedener Stärke in verschiedenen Wassertiefen $\zeta_1$.

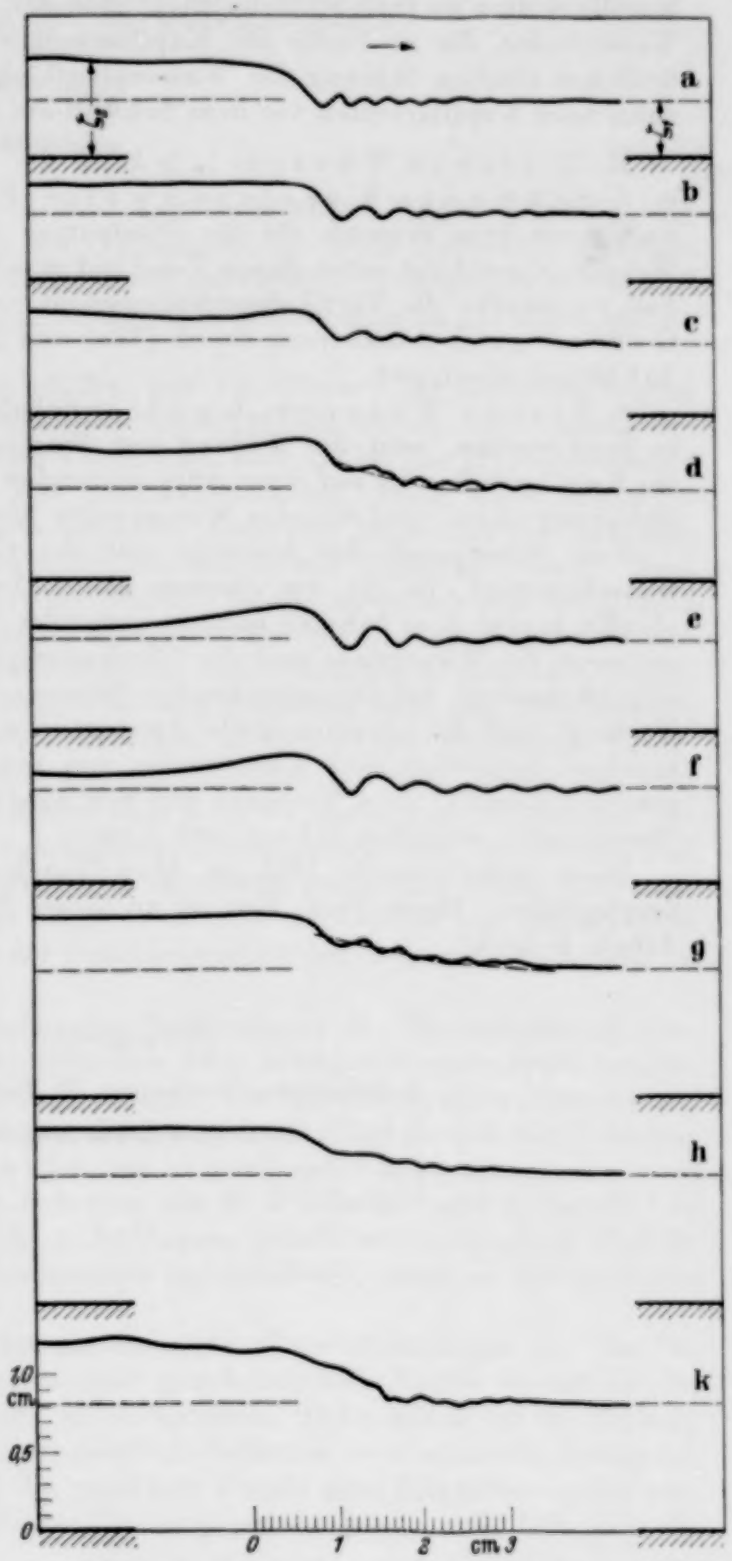



Abb. 12. Beobachtete Schwalle verschiedener Stärke und Übergangsformen zwischen Schwallen und Einzelwellen in verschiedenen Wassertiefen $\zeta_1$.

A. Sehr flaches Wasser: $\zeta_1 < b$.

3. Schwache Wasserschwalle: Die Oberflächenspannung verhindert ein Zerreißen der Wasseroberfläche, und es kommt zur Bildung von Kapillarwellen. Diese Kapillarwellen übernehmen die Energiedissipation des Schwalls. Eine stetige Erhöhung v o r dem Schwall tritt nicht auf, da in so flachem Wasser allenfalls eine stetige Absenkung auftreten könnte. Daß diese auch

nicht beobachtet wird, rührt daher, daß der Schwall mit Übergrundwellengeschwindigkeit wandert, das Einzelwellental, das einer stetigen Absenkung entsprechen würde, aber mit Untergrundwellengeschwindigkeit (Abschnitt 5).

4. Starke Wasserschwalle: Wenn die nach (19) berechneten Amplituden der Kapillarwellen zu groß werden, bricht sich der Wasserschwall. Es kommt zur Ausbildung einer Wasserwalze, die an Stelle der Kapillarwellen die Energiedissipation übernimmt. Infolge der örtlichen starken Störung der Wasseroberfläche im Gebiet der Wasserwalze treten zwar auch dann noch Kapillarwellen vor dem Schwall auf; ihre Amplituden sind aber sehr klein.

B. Tieferes Wasser: $\zeta_1 > b$.

5. Schwache Wasserschwalle: Es kommt wie in Fall 3 zur Bildung von Kapillarwellen vor dem Schwall, die die Dissipation der Energie übernehmen. Die Ausbildung einer Wasserwalze erfolgt unter diesen Umständen nicht, die Wasseroberfläche bleibt stetig. In diesem Fall verursacht die Vertikalgeschwindigkeit eine stetige Erhöhung vor der Stoßfront, deren Größe mit guter Annäherung durch (18a) und (18b) gegeben ist. Die Kapillarwellen sind dieser Erhöhung überlagert.

6. Starke Wasserschwalle: Sobald die Amplituden der Kapillarwellen gemäß (19) zu groß werden, setzt die Bildung von Wasserwalzen ein. Damit verschwinden wie in Fall 4 die Kapillarwellen bis auf einen unbedeutenden Rest. Gleichzeitig verschwindet auch die stetige Erhöhung: diese wird von der Wasserwalze überdeckt.

Vom Standpunkt der Analogie mit der Gasdynamik ist die Bildung einer Wasserwalze wünschenswert, da sie am ehesten einem Verdichtungsstoß entspricht und da die Wasseroberfläche vor dem Schwall nahezu ungestört und damit eben bleibt. Man müßte also im Experiment die Wassertiefe und die Geschwindigkeit der durch das Wasser geschleppten Modelle so groß machen, daß die entstehenden Wasserschwalle eine Wasserwalze ausbilden. Dies hat den Nachteil, daß die experimentelle Apparatur ziemlich groß würde. Doch darf man dessen ungeachtet feststellen, daß Wassertiefen von weniger als 0,5 cm schlecht geeignet sind zu einem genauen quantitativen Vergleich mit den gasdynamischen Formeln. Am günstigsten sind wohl Wassertiefen zwischen 0,5 cm und 2 cm.

Diese Arbeit wurde 1951 im Max-Planck-Institut für Strömungsforschung zu Göttingen durchgeführt. Herrn Prof. *Betz* sei an dieser Stelle für Anregung und stete Unterstützung der Arbeit gedankt.

(Eingegangen am 24. Juni 1952.)

Anschrift des Verfassers: *E. Becker*, Göttingen, Böttingerstr. 6/8,
Max-Planck-Institut für Strömungsforschung.

# Über die Berechnung der Hypoidgetriebe.

## (I. Mitteilung.)

Von P. Matthieu.

**1. Einleitung.** Während die Theorie der Stirn- und Kegelradgetriebe längst ausgebaut und heute weitgehend abgeschlossen ist, ist diejenige der Hypoidgetriebe (auch Hyperboloidgetriebe oder Schraubgetriebe genannt) noch verhältnismäßig wenig entwickelt. Es liegt das daran, daß die Theorie der Hypoidgetriebe trotz des einfachen mechanischen Sachverhalts auf beträchtliche mathematische Schwierigkeiten führt.

Der erste, der sich mit Hypoidverzahnungen befaßte, war *Th. Olivier* [1]. Er stellte zu Beginn des vergangenen Jahrhunderts gewisse mathematische Begriffsbildungen zur Betrachtung beliebiger Zahnradgetriebe auf und fand, von diesen ausgehend, eine Reihe von Hypoidgetrieben mit Punktverzahnung sowie auch ein solches mit Linienverzahnung. Diese Untersuchungen *Oliviers* blieben lange Zeit die einzigen auf diesem Gebiete. Auch der Altmeister der Getriebelehre in Deutschland, *F. Reuleaux*, befaßts sich nicht wesentlich mit Hypoidgetrieben. Nach einigen kürzeren Untersuchungen verschiedenartiger Natur [2] setzte eigentlich erst zu Beginn dieses Jahrhunderts eine systematische Weiterentwicklung der Theorie der Hypoidgetriebe ein. Der Eigenartigkeit des Problems entsprechend erstreckte sich diese vor allem in zwei Richtungen. Einerseits lag es nahe, auch im jetzigen, räumlichen Falle nach einfachen speziellen Verzahnungsformen zu fragen, nachdem man bei den ebenen Zahnrädern in Gestalt der Zykloiden-, Elvolventen- und Triebstockverzahnung einfache geometrische Formen gefunden hatte, die miteinander im Eingriff stehen. Aber dieser Weg erwies sich jetzt als bedeutend schwieriger. Es lassen sich zwar ohne Mühe die gleichen kinematischen Grundbegriffe wie im ebenen Fall (Achsoide, Hüllflächenbeziehungen usw.) einführen [3]. Von diesen ausgehend lassen sich auch viele spezielle räumliche Zahnformen finden, vor allem solche, die die Gestalt von Regelflächen haben [4]. Jedoch erreicht diese Theorie niemals die Geschlossenheit des ebenen Falles. Auch ist sie für praktische Zwecke kaum verwendbar.

Aus diesem Grunde hat sich, vor allem infolge des Aufkommens der Hypoidräder in der Praxis, neben dieser ersten Richtung eine zweite, mehr den Anwendungen entsprechende herausgebildet. Sie kümmert sich im Gegensatz zur ersten weniger um theoretisch zwar interessante, praktisch jedoch kaum verwendbare Eingriffsformen. Vielmehr beschäftigt sie sich mit Zahnradflankenformen und -problemen (unter Umständen auch nur in genügender Approximation) wie sie in der Praxis auftreten. Hier sind vor allem die Arbeiten von *E. Wildhaber* [5] und *J. Capelle* [6] zu nennen. Diese zweite Richtung steht noch in ihren Anfängen, jedoch ist zu erwarten, daß sie der allgemeinen Tendenz der angewandten Mathematik entsprechend, noch zu bedeutsamen Resultaten führen wird.

Die vorliegende Arbeit schließt sich zunächst an die erste dieser Richtungen an. Sie beschäftigt sich mit dem ursprünglichen Problem, zu einer gegebenen Zahnflanke die mit ihr im Eingriff stehende Gegenflanke rechnerisch exakt zu bestimmen. Bekanntlich ist die Lösung dieser Aufgabe bei gegebenen Achsen und Rotationsgeschwindigkeiten stets eindeutig bestimmt. Bezogen auf das System der Gegenflanke führt die gegebene Flanke eine Relativbewegung aus, deren Hüllfläche die Gegenflanke ist. Von dieser Erzeugungsweise ausgehend, läßt sich die

---

[1] Er hat seine Resultate zusammengefaßt in dem Werk „Théorie géométrique des engrenages". Paris 1842.

[2] Diese sind angegeben in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band IV (Mechanik), Heft 3 (Kinematik, von *A. Schönflies* und *M. Grübler*), Nr. 27 (Zahnräder und andere Mechanismen), S. 261 ff.

[3] Vgl. z. B. das unter [2] genannte Werk.

[4] Vgl. die folgenden Arbeiten: *M. Disteli*, Z. Math. Phys. 53 (1904), S. 51. *M. Disteli*, Z. Math. Phys. 60 (1911), S. 244. *E. Stübler*, Z. angew. Math. Mech. 2 (1922), S. 429. *R. Crain*, Werkstattstechnik 1 (1907), S. 88.

[5] *Ernest Wildhaber*, Basic Relationschip of Hypoid Gears. The Machinist (englische Ausgabe), Jahrgang 1946, Hefte vom 1. Juni, 8. Juni, 22. Juni, 28. Sept., 26. Okt., 23. Nov., 30. Nov., 14. Dez.

[6] *J. Capelle*, Théorie et calcul des engrenages hypoïds. Edition Dunod. Paris 1949.

Gegenflanke nach bekannten Prinzipien leicht durch ein Gleichungssystem charakterisieren, wie das z. B. *H. Resal* getan hat [1].

Offenbar wegen der zunächst sehr kompliziert scheinenden Gestalt dieser Gleichungen sind aber bis jetzt nie Methoden zu ihrer Lösung entwickelt worden. Demgegenüber soll in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden, daß sich das Gleichungssystem für die Gegenflanke in überraschender Weise sogar in endlicher Form lösen läßt. Dadurch wird die Theorie der Hypoidräder auf eine neue Basis gestellt. Einerseits können die einfachen Gleichungen, die zwischen einer Flanke und ihrer Gegenflanke bestehen, dazu benutzt werden, um möglichst einfache Lösungen des Verzahnungsproblems in analythischer Form zu finden. Andererseits kann man bei beliebig gegebener Flanke die Gegenflanke stets punktweise numerisch berechnen, so daß man gleichzeitig auch eine einfache, für alle Fälle gültige, numerische Berechnungsmethode hat. Anschließend an diese exakte Lösung können dann weiterhin auch noch die praktischen Methoden der erwähnten zweiten Richtung zur Anwendung gelangen.

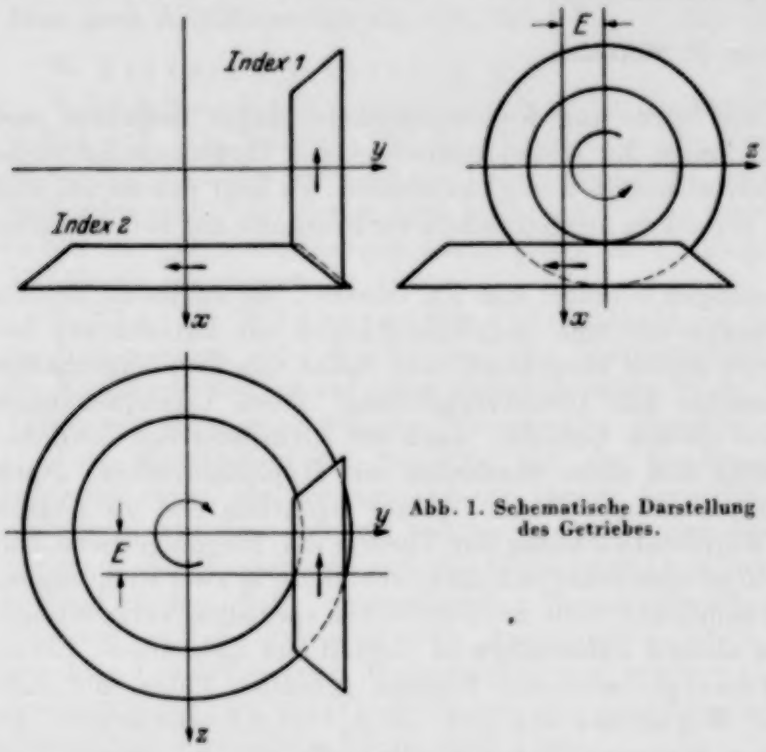



Abb. 1. Schematische Darstellung des Getriebes.

In der vorliegenden Mitteilung werden die Grundgleichungen des Verzahnungsproblems aufgestellt und gelöst für den einfachsten und weitaus wichtigsten Fall von sich rechtwinklig kreuzenden Achsen. Der Fall beliebiger windschiefer Achsen sowie einige sich anschließend ergebender Probleme werden in einer Reihe weiterer Mitteilungen behandelt werden.

**2. Aufstellung der Gleichungen.** Wir legen das Getriebe auf die in Abb. 1 schematisch in Grund-, Auf- und Seitenriß angegebene Art in einen ruhenden Raum bzw. in ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Koordinaten $x$, $y$, $z$. Die Achse des Tellerrades fällt mit der $x$-Achse zusammen, diejenige des Ritzels verläuft im Abstand $E$ parallel zur $y$-Achse. Die Ausdrücke „Tellerrad" und „Ritzel" sind nur der Bequemlichkeit wegen eingeführt und haben keine tiefere Bedeutung, insbesondere nicht in bezug auf die Größenverhältnisse. In üblicher Weise werden alle Größen, die sich auf das Ritzel beziehen, mit dem Index 1, diejenigen die sich auf das Tellerrad beziehen, mit dem Index 2 versehen. Die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder seien mit $\omega_1$ und $\omega_2$ bezeichnet. $\omega_1$, $\omega_2$ und $E$ können beliebig gegeben sein.

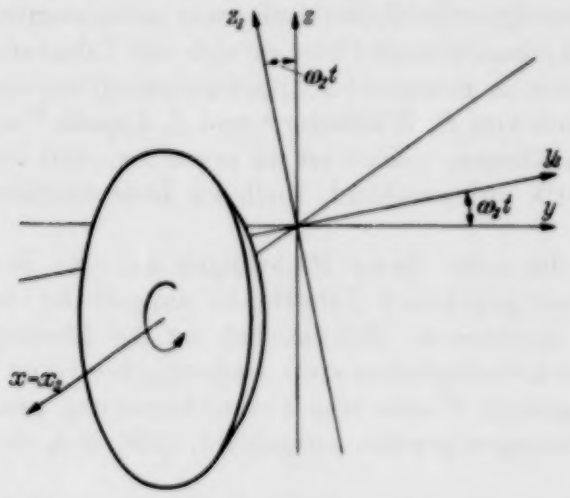



Abb. 2. Anschauliche Darstellung des Tellerradsystems.

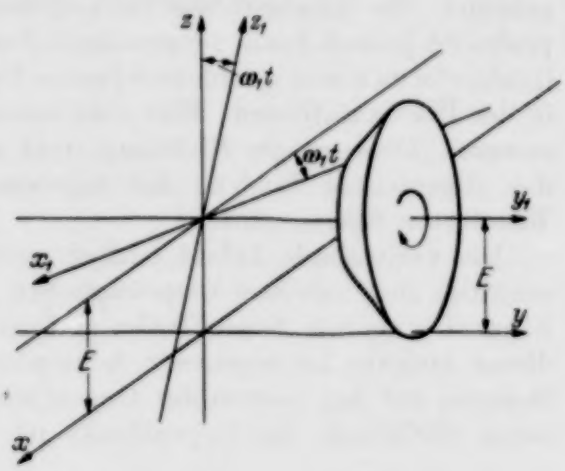



Abb. 3. Anschauliche Darstellung des Ritzelsystems.

[1] Comptes rendus de l'ac. des sc 117 (1893).

Weiterhin führen wir einen mit dem Tellerrad fest verbundenen Raum ein (der dann naturgemäß gegenüber dem ersten, ruhenden Raum beweglich ist) und in diesem die rechtwinkligen Koordinaten $x_2$, $y_2$, $z_2$ (Abb. 2), ebenso einen mit dem Ritzel fest verbundenen Raum mit den Koordinaten $x_1$, $y_1$, $z_1$ (Abb. 3). Das ruhende Koordenatensystem und das des Tellerrades fallen zur Zeit $t = 0$ vollständig zusammen, während dasjenige des Ritzels ihnen gegenüber um den Betrag $E$ in der $z$-Eichtung parallel verschoben ist. Nachher verdrehen sich die Systeme gegeneinander. Statt rechtwinkligen Koordinaten kann man im Ritzel- und im Tellerradraum auch Polarkoordinaten $r_1$, $\vartheta_1$, $\varphi_1$ bzw. $r_2$, $\vartheta_2$, $\varphi_2$ einführen (Abb. 4 u. 5).

Der Ritzel-, der Tellerrad- und der ruhende Raum bzw. die in ihnen liegenden Koordinatensysteme führen gegeneinander Relativbewegungen aus. Für unsere Zwecke wird vor allem diejenige zwischen den beiden ersten Räumen von Bedeutung sein. Die Koordinaten der fünf ein-

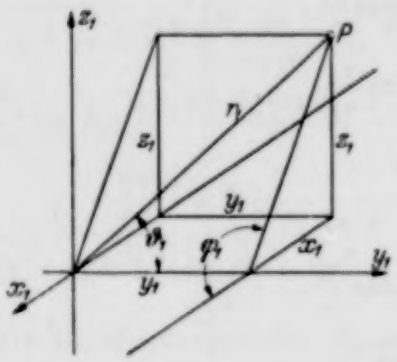



Abb. 4. Einführung von Polarkoordinaten im Ritzelsystem.

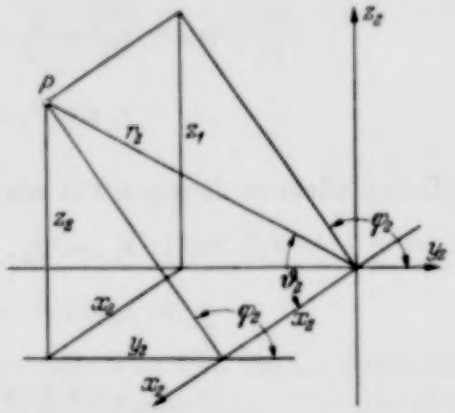



Abb. 5. Einführung von Polarkoordinaten im Tellerradsystem.

geführten Systeme lassen sich leicht aufeinander umrechnen. Zunächst bestehen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten des ruhenden und des Ritzelraumes die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\omega_1 t + (z-E)\cdot\sin\omega_1 t\,, & x &= x_1\cos\omega_1 t - z_1\sin\omega_1 t\,,\\ y_1 &= y\,, & y &= y_1\,,\\ z_1 &= -x\sin\omega_1 t + (z-E)\cos\omega_1 t\,, & z &= E + x_1\sin\omega_1 t + z_1\cos\omega_1 t \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

und ebenso zwischen denjenigen des ruhenden und des Tellerradraumes die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x\,, & x &= x_2\,,\\ y_2 &= y\cos\omega_2 t + z\sin\omega_2 t\,, & y &= y_2\cos\omega_2 t - z_2\sin\omega_2 t\,,\\ z_2 &= -y\sin\omega_2 t + z\cos\omega_2 t, & z &= y_2\sin\omega_2 t + z_2\cos\omega_2 t\,. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Daraus folgen für die beiden bewegten rechtwinkligen Systeme die Umrechnungsformeln

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1\cos\omega_1 t - z_1\sin\omega_1 t\,,\\ y_2 &= y_1\cos\omega_2 t + x_1\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t + z_1\cos\omega_1 t\sin\omega_2 t + E\sin\omega_2 t\,,\\ z_2 &= -y_1\sin\omega_2 t + x_1\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t + z_1\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t + E\cos\omega_2 t\,, \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_2\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t + x_2\cos\omega_1 t + z_2\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t - E\sin\omega_1 t\,,\\ y_1 &= y_2\cos\omega_2 t - z_2\sin\omega_2 t\,,\\ z_1 &= y_2\cos\omega_1 t\sin\omega_2 t - x_2\sin\omega_1 t + z_2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t - E\cos\omega_1 t\,. \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Hier könnte man bereits die eine Zahnflanke, z. B. die des Tellerrades, als Fläche in der Gestalt

$$f_2(x_2, y_2, z_2) = 0 \qquad (5)$$

beliebig annehmen und diese Gleichung gemäß (3) auf den Ritzelraum umrechnen, wodurch sich in diesem eine von $t$ abhängige, also bewegte Fläche in der Gestalt

$$f_1(x_1, y_1, z_1, t) = 0 \qquad (6)$$

ergibt. Die Gegenflanke ist dann die Hüllfläche dieser bewegten Fläche. Mathematisch bestimmt

sie sich nach bekannten Regeln dadurch, daß man (6) partiell nach $t$ differentiiert, also die Gleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(x_1, y_1, z_1, t) = 0 \tag{7}$$

bildet, und $t$ aus (6) und (7) eliminiert.

Dieser prinzipiell einfache Weg führt jedoch in rechtwinkligen Koordinaten auf große rechnerische Schwierigkeiten. Wesentlich einfacher werden die Gleichungen, wenn man die oben eingeführten Polarkoordinaten verwendet. Als Umrechnungsformeln ergeben sich für die beiden Koordinatensysteme des Ritzelraumes gemäß Abb. 4 die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1, & r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},\\ y_1 &= r_1 \cos\vartheta_1, & \vartheta_1 &= \arccos\frac{y_1}{r_1},\\ z_1 &= r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1, & \varphi_1 &= \operatorname{arc\,tg}\frac{z_1}{x_1}. \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Für den Tellerradraum dagegen hat man die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= r_2 \cos\vartheta_2, & r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},\\ y_2 &= r_2 \sin\vartheta_2 \cos\varphi_2, & \vartheta_2 &= \arccos\frac{x_2}{r_2},\\ z_2 &= r_2 \sin\vartheta_2 \sin\varphi_2, & \varphi_2 &= \operatorname{arc\,tg}\frac{z_2}{y_2}. \end{aligned}\right| \tag{9}$$

Daraus folgen weiterhin gemäß (1) und (2) zwischen den beiden Polarkoordinatensystemen einerseits und den rechtwinkligen Koordinaten des ruhenden Raumes andererseits die folgenden Relationen, die sich auch nach Abb. 4 und 5 sofort aus der Anschauung gewinnen lassen:

$$\left.\begin{aligned} x &= r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) = r_2 \cos\vartheta_2,\\ y &= r_1 \cos\vartheta_1 = r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t),\\ z &= r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t) + E = r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t). \end{aligned}\right| \tag{10}$$

Nach diesen Formeln lassen sich die beiden Polarkoordinatensysteme und die rechtwinkligen Koordinaten des ruhenden Systems leicht aufeinander umrechnen. Speziell ergeben sich für die beiden Polarkoordinatensysteme die Umrechnungsformeln:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{E^2 + r_1^2 + 2\,E\,r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)},\\ \vartheta_2 &= \arccos\left(\frac{r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2}\right),\\ \varphi_2 &= -\omega_2 t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_1 \cos\vartheta_1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{E^2 + r_2^2 - 2\,E\,r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t)},\\ \vartheta_1 &= \arccos\left(\frac{r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)}{r_1}\right),\\ \varphi_1 &= -\omega_1 t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) - E}{r_2 \cos\vartheta_2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir wenden uns nun der oben im Prinzip bereits durchgeführten Berechnung der Gegenflanke als Hüllfläche zu. Die eine Zahnflanke, z. B. die des Tellerrades, sei wieder gegeben. Wir nehmen sie jetzt in der Form

$$\varphi_2 = \Phi_2(r_2, \vartheta_2) \tag{13}$$

an[1]. Indem wir hier für $\varphi_2$, $\vartheta_2$ und $r_2$ die Werte (11) einsetzen, erhalten wir die bewegte Tellerrad-

[1] Der Fall, daß die Flanke in der allgemeinen Gestalt $\Phi_2^*(\lambda_2, \vartheta_2, \varphi_2) = 0$ gegeben ist, läßt sich, wie man aus den folgenden Ausführungen leicht erkennen wird, sofort auf den obigen Fall zurückführen. Wir halten uns deshalb im folgenden an die Darstellung (13).

flanke im Ritzelsystem in der Gestalt

$$-\omega_2 t + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_1 \cos\vartheta_1}\right) = \Phi_2(r_2, \vartheta_2)\,, \tag{14}$$

wobei zur Abkürzung die Größen

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{E^2 + r_1^2 + 2\,E\,r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}\,, \\ \vartheta_2 &= \arccos\left(\frac{r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

beibehalten wurden. Die partielle Ableitung von (14) nach $t$ ergibt

$$\left.\begin{aligned} &-\omega_2 + \frac{\omega_1 \dfrac{r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_1 \cos\vartheta_1}}{1 + \left[\dfrac{E + r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_1 \cos\vartheta_1}\right]^2} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2, \vartheta_2)\frac{\partial r_2}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2, \vartheta_2)\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t} \\ &= \omega_1 \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2, \vartheta_2)\frac{E\,r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2} \\ &+ \omega_1 \frac{\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2, \vartheta_2)}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{r_1 \sin\vartheta_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2}\right)^2}} \cdot \left[\frac{r_1 \sin\vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2} + \frac{E\,r_1^2 \sin^2\vartheta_1 \cos^2(\varphi_1 + \omega_1 t)}{r_2^3}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Hüllfläche, also die gesuchte Zahnflanke des Ritzels erhält man nun wieder durch Elimination von $t$ aus (14) und (16) unter Berücksichtigung der Abkürzungen (15). Die Gleichungen (14) bis (16) stellen also das gesuchte Gleichungssystem für die Gegenflanke dar.

**3. Lösung der Gleichungen.** Diese zunächst kompliziert scheinenden Gleichungen vereinfachen sich wesentlich, wenn man an Stelle von $r_1$, $\vartheta_1$, $\varphi_1$ gemäß (10) wiederum die Veränderlichen $r_2$, $\vartheta_2$, $\varphi_2$ einführt. (14) geht dann wieder über in (13), während die Beziehungen (15) nicht mehr nötig sind. An Stelle von (16) erhält man schließlich gemäß (10)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\omega_2}{\omega_1} + \operatorname{cotg}\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) &= E\cos\vartheta_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2, \vartheta_2) \\ + \left[\frac{r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) - E}{r_2} + \frac{E}{r_2}\cos^2\vartheta_2\right] &\frac{1}{\sin\vartheta_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2, \vartheta_2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Diese Gleichung läßt sich noch in leicht ersichtlicher Weise vereinfachen, und man erhält dann in Verbindung mit (13) im Tellerradsystem für die Gegenflanke die beiden Gleichungen

$$\varphi_2 = \Phi_2(r_2, \vartheta_2)\,, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\omega_1}{\omega_2} + \operatorname{cotg}\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) &= E\cos\vartheta_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_2}(r_2, \vartheta_2) \\ + \left[\sin(\varphi_2 + \omega_2 t) - \frac{E}{r_2}\sin\vartheta_2\right] &\frac{\partial\Phi_2}{\partial\vartheta_2}(r_2, \vartheta_2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Von hier kann man natürlich gemäß (11) bzw. (12) wiederum zum Ritzelsystem übergehen. Wir schreiben diese Gleichungen nochmals an in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{E^2 + r_2^2 - 2\,E\,r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t)}\,, \\ \cos\vartheta_1 &= \frac{r_2 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t)}{r_1}\,, \\ \operatorname{tg}(\varphi_1 + \omega_1 t) &= \frac{r_2 \sin\vartheta_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) - E}{r_2 \cos\vartheta_2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Aus (18) bis (20) läßt sich dann im Prinzip die Gegenflanke ausrechnen in der Form

$$\varphi_1 = \Phi_1(r_1, \vartheta_1)\,. \tag{21}$$

Die Gleichungen (18) bis (21) stellen nun die Lösung des Verzahnungsproblems bei Hypoidgetrieben dar. Zwei Zahnflanken (18) und (21) stehen dann und nur dann miteinander im Linieneingriff, wenn (18) und (21) sich vermöge (19) und (20) auseinander herleiten lassen. Die Zeit $t$ tritt dabei als Parameter auf in einer gleich noch näher zu besprechenden Weise.

Die Bedeutung der Grundgleichungen (18)—(21) liegt in verschiedener Richtung. Die wichtigsten Anwendungen sind die folgenden:

a) Erstens scheint sich zwar im allgemeinen wegen der komplizierten Gestalt von (19) und (20) die zu einer gegebenen Tellerradflanke (18) gehörenden Gleichung (21) für die Ritzelflanke nicht in endlicher Form zu ergeben. Dagegen besteht durchaus die Möglichkeit, daß das für spezielle Flanken (18) der Fall ist, sodaß man dann in diesen Fällen eine endliche Darstellung für die Ritzelflanke in der Form (21) hat. Numerisch läßt sich (21) natülich stets leicht bestimmen. Man vergleiche dazu Punkt c).

b) Als wichtigste Anwendung der Grundformeln läßt sich in jedem Fall eine Darstellung in geschlossener Form für die Ritzelflanke in Gestalt einer Parameterdarstellung angeben. Man bemerkt nämlich zunächst, daß gemäß (19) die Zeit $t$ sich aus den übrigen Veränderlichen dieser Gleichung im wesentlichen durch Lösung einer quadratischen Gleichung ergibt. In der Tat kann man ja etwa $\sin(\varphi_2+\omega_2 t)=u$; $\cos(\varphi_2+\omega_2 t)=\sqrt{1-u^2}$ setzen (vgl. dazu Abschnitt 4, S. 61). Zu gegebenen Werten von $r_2$ und $\vartheta_2$ können demnach gemäß (18) und (19) die zugehörigen Werte von $\varphi_2$ und $t$ in endlicher Form angegeben werden. Aus diesem folgen dann weiterhin gemäß (20) die zugehörigen Werte von $r_1$, $\vartheta_1$, $\varphi_1$. Diese letzteren Größen ergeben sich damit also in endlicher Form aus den Parametern $\vartheta_2$ und $\varphi_2$, womit die genannte Parameterdarstellung der Ritzelflanke gefunden ist.

c) Die hergeleitete Parameterdarstellung der Ritzelflanke eignet sich in hervorragender Weise auch zur numerischen Berechnung dieser letzteren, wenn die Tellerradflanke gegeben ist. Man vergleiche dazu Abschnitt 4 (S. 61) dieser Arbeit.

d) Bei gegebenen Funktionen (18) und (21) kann sofort verifiziert werden, ob die zugehörigen Flanken miteinander im Eingriff stehen oder nicht. Man geht dazu von (21) aus, ersetzt darin $r_1$, $\vartheta_1$, $\varphi_1$ durch die Ausdrücke (12) bzw. (20). Weiterhin eliminiert man gemäß (19) $t$. Die übrig gebliebene Beziehung zwischen $r_2$, $\vartheta_2$, $\varphi_2$ muß dann im Eingriffsfall mit (18) übereinstimmen.

e) Die exakt geltenden Gleichungen (18)—(21) können approximativ durch einfachere Gleichungen ersetzt werden, wodurch sich Näherungsmethoden zur Berechnung von Hypoidgetrieben ergeben.

Die geometrische Bedeutung dieser Entwicklungen ist die folgende: Jedes System der vier Größen $r_2$, $\vartheta_2$, $\varphi_2$, $t$, das (18) und (19) genügt, stellt (zunächst im Tellerradsystem) einen Punkt der Gegenflanke dar, der dann gemäß (20) auch auf das Ritzelsystem umgerechnet werden kann. Gleichzeitig sind $r_2$, $\vartheta_2$, $\varphi_2$ aber auch die Koordinaten eines Punktes der ursprünglichen Flanke. Demnach ist $t$ die Zeit, zu welcher beide zusammenfallen, also derjenige Zeitpunkt, in welchem der durch $r_2$, $\vartheta_2$, $\varphi_2$ gegebene Punkt der Tellerradflanke die Flanke des Ritzels berührt. Jeder Punkt der ersteren wird während der Bewegung zum Berührungspunkt. Die in (19) und (20) auftretende Zeit $t$ stellt den Zeitpunkt dar, in welchem dies stattfindet. Daraus ergibt sich noch unmittelbar der folgende Schluß: Wenn man in (19) für $t$ irgend einen Zahlwert einsetzt, so stellt die dadurch hervorgehende Gleichung in Verbindung mit (18) die Berührungslinie der beiden Zahnflanken zu dieser Zeit dar.

Den beiden Lösungen der quadratischen Gleichung entsprechend gibt es sogar zwei Lösungen für $u$ bzw. $t$. Welche der beiden Lösungen in einem konkreten Fall in Betracht kommt, erkennt man am besten aus der Anschauung gemäß Abb. 1, unter Beachtung der beiden letzten Formeln (10), nach welch letzteren die Größen $u$ und $\sqrt{1-u^2}$ im wesentlichen die Koordinaten $z$ und $y$ des gegebenen Punktes im ruhenden System zur Zeit der Berührung darstellen. Demnach müssen in praktischen Fällen im allgemeinen $u$ und in jedem Fall der zugehörige Wert von $\sqrt{1-u^2}$ positiv sein. Im folgenden sprechen wir, um die Betrachtungen möglichst einfach zu gestalten, stets nur von der einen, effektiv in Betracht kommenden Lösung und also auch nur von einem Zeitpunkt der Berührung.

Diesen Entwicklungen gemäß erscheint die unter b) angegebene Parameterdarstellung in endlicher Form für die Gegenflanke in einem sehr anschaulichen Lichte. Wie eben erwähnt, stellt der Parameter $t$ den Zeitpunkt dar, zu welchem ein beliebig gegebener Punkt der Tellerradflanke mit den Koordinaten $r_2$, $\vartheta_2$, $\varphi_2$ zum Berührungspunkt wird. In diesem Moment fällt also der gegebene Punkt der Tellerradflanke mit einem Punkt der Ritzelflanke zusammen, welch letzteren wir als den Gegenpunkt des gegebenen bezeichnen wollen. Indem wir schließlich diesen gemeinsamen Punkt gemäß den Gleichungen (20) auf das Ritzelsystem umrechnen, erhalten wir die Koordinaten des Gegenpunktes in diesem letzteren. Die genannte Parameterdarstellung läuft also geometrisch gesprochen darauf hinaus, daß man zu

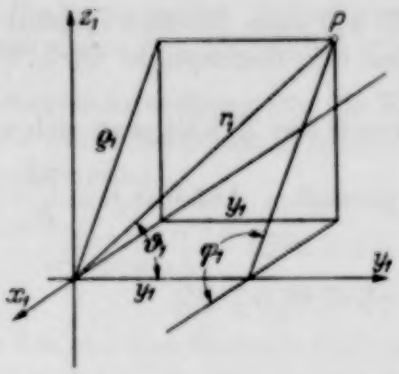
einem gegebenen Punkt der Tellerradflanke zunächst den Zeitpunkt $t$ bestimmt, zu welchem er die Gegenflanke im Gegenpunkt berührt, und dann gemäß (20) die Koordinaten des Gegenpunktes im Ritzelsystem berechnet.

Ergänzend sei noch bemerkt, daß die Grundgleichungen (18) bis (21) nicht nur in den bisher verwendeten Polarkoordinaten, sondern auch in Zylinderkoordinaten eine einfache Gestalt annehmen. Führen wir solche Koordinaten in den beiden bewegten Räumen gemäß Abb. 6 und Abb. 7 ein, so tritt an Stelle von (18) für die gegebene Zahnflanke des Tellerrades eine Gleichung der Gestalt

$$\varphi_2 = \Psi_2(\varrho_2, x_2)\,. \tag{22}$$

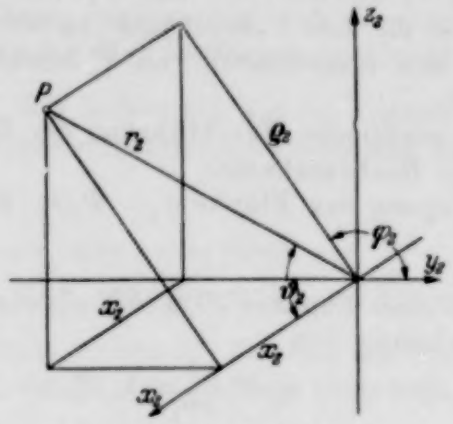
Durch eine leichte Umrechnung geht ferner (19) über in

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{x_2}{\varrho_2}\cos(\varphi_2+\omega_2 t) &= E\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}(\varrho_2, x_2) \\ +\sin(\varphi_2+\omega_2 t)&\left[x_2\frac{\partial \Psi_2}{\partial \varrho_2}(\varrho_2, x_2) - \varrho_2\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}(\varrho_2, x_2)\right], \end{aligned}\right\} \tag{23}$$




$\varrho_1, \varphi_1, y_1$ = Zylinderkoordinaten

Abb. 6. Einführung von Zylinderkoordinaten im Ritzelsystem.




$\varrho_2, \varphi_2, x_2$ = Zylinderkoordinaten

Abb. 7. Einführung von Zylinderkoordinaten im Tellerradsystem.

während an Stelle von (20) die Umrechnungsformeln

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varrho_2\cos(\varphi_2+\omega_2 t)\,, \\ \varrho_1 &= \sqrt{x_2^2 + [E - \varrho_2\sin(\varphi_2+\omega_2 t)]^2}\,, \\ \operatorname{tg}(\varphi_1+\omega_1 t) &= \frac{\varrho_2\sin(\varphi_2+\omega_2 t) - E}{x_2} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

treten. Schließlich erhält man für die Ritzelflanke entsprechend (21) eine Beziehung der Form

$$\varphi_1 = \Psi_1(\varrho_1, y_1)\,. \tag{25}$$

Die Gleichungen (22) bis (25) sind das vollständige Analogon zu (18) bis (21) und können in genau derselben Weise verwendet werden.

**4. Bemerkungen zur numerischen Berechnung der Gegenflanke.** Wie bereits erwähnt, sind die Grundgleichungen (18) bis (21) hervorragend geeignet für die Lösung der wichtigen Aufgabe, zu einer gegebenen Zahnflanke die Gegenflanke punktweise numerisch zu berechnen. Aus Gründen der Systematik wurde bei unseren Betrachtungen stets die Tellerradflanke als die gegebene, die Ritzelflanke als die gesuchte angenommen, aber selbstverständlich ist das Verhältnis ein absolut gegenseitiges. Die umgekehrten Formeln ergeben sich aus den oben abgeleiteten in leicht ersichtlicher Weise.

Um aus einem Punkt $P(r_2^*, \vartheta_2^*, \varphi_2^*)$ der Tellerradflanke mit $\varphi_2^* = \Phi_2(r_2^*, \vartheta_2^*)$ gemäß den Betrachtungen des letzten Abschnitts den zugehörigen Gegenpunkt $Q(r_1^*, \vartheta_1^*, \varphi_1^*)$ der Ritzelflanke und die Zeit $t^*$ der Berührung zu berechnen, schreibt man Gleichung (19) am besten in der Form

$$\left.\begin{aligned} \cos(\varphi_2+\omega_2 t) &= \sin(\varphi_2+\omega_2 t)\operatorname{tg}\vartheta_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta_2}(r_2, \vartheta_2) \\ +\operatorname{tg}\vartheta_2&\left[\frac{\omega_2}{\omega_1} + E\cos\vartheta_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial r_2}(r_2, \vartheta_2) - \frac{E}{r_2}\sin\vartheta_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta_2}(r_2, \vartheta_2)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Führt man die Abkürzungen ein

$$\left.\begin{aligned} u^* &= \sin(\varphi_2^* + \omega_2 t^*)\,, \\ A &= \operatorname{tg}\vartheta_2^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta_2}(r_2^*, \vartheta_2^*)\,, \\ B &= \operatorname{tg}\vartheta_2^* \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} + E\cos\vartheta_2^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_2}(r_2^*, \vartheta_2^*) - \frac{E}{r_2^*}\sin\vartheta_2^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta_2}(r_2^*, \vartheta_2^*)\right], \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

und quadriert (26), so ergibt sich nach leichter Rechnung zur Bestimmung von $u^*$ die Gleichung

$$(A^2+1)\,u^{*2} + 2\,A\,B\,u^* + B^2 - 1 = 0\,. \tag{28}$$

Daraus erhält man $u^*$ in der Gestalt

$$u^* = \sin(\varphi_2^* + \omega_2 t^*) = -\frac{AB}{A^2+1} \pm \frac{\sqrt{A^2 - B^2 + 1}}{A^2+1}\,. \tag{29}$$

woraus sich weiterhin $\cos(\varphi_2^* + \omega_2 t^*)$ und $t^*$ ergibt. Das Vorzeichen in (29) sowie dasjenige von $\cos(\varphi_2^* + \omega_2 t^*)$ ergeben sich wie erwähnt leicht aus der Anschauung. Im allgemeinen müssen $\sin(\varphi_2^* + \omega_2 t^*)$ und $\cos(\varphi_2^* + \omega_2 t^*)$ positiv sein.

Damit ist die Zeit $t^*$ berechnet, zu welcher $P(r_2^*, \vartheta_2^*, \varphi_2^*)$ zum Berührungspunkt wird. Aus dieser und den Koordinaten von $P$ berechnet sich dann der Gegenpunkt $Q(r_1^*, \vartheta_1^*, \varphi_1^*)$ sofort gemäß (20).

Für die praktische Durchführung der Berechnung von $Q$ aus $P$ hält man sich am besten an das folgende Rechenschema:

1. Festlegung der Flanke $\varphi_2 = \Phi_2(r_2, \vartheta_2)$ und der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Phi_2}{\partial r_2}(r_2, \vartheta_2)$ und $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta_2}(r_2, \vartheta_2)$.

2. Wahl eines Punktes $P(r_2^*, \vartheta_2^*, \varphi_2^*)$ der Flanke mit $\varphi_2^* = \Phi_2(r_2^*, \vartheta_2^*)$.

3. Berechnung von

$$A = \operatorname{tg}\vartheta_2^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta_2}(r_2^*, \vartheta_2^*)\,,$$

$$B = \operatorname{tg}\vartheta_2^* \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} + E\cos\vartheta_2^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_2}(r_2^*, \vartheta_2^*) - \frac{E}{r_2^*}\right] \sin\vartheta_2^* \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta_2}(r_2^*, \vartheta_2^*)\,,$$

$$C = \frac{AB}{A^2+1}\,, \qquad D = \frac{B^2-1}{A^2+1}\,,$$

daraus $\sin(\varphi_2^* + \omega_2 t^*) = -C \pm \sqrt{C^2 - D}$ und die Zeit $t^*$ der Berührung.

4. Schließlich Bestimmung des zu $P$ gehörenden Gegenpunktes $Q(r_1^*, \vartheta_1^*, \varphi_1^*)$ gemäß

$$r_1^* = \sqrt{E^2 + r_2^{*2} - 2\,E\,r_2^{*2}\sin\vartheta_2^* \sin(\varphi_2 + \omega_2 t^*)}\,,$$

$$\cos\vartheta_1^* = \frac{r_2^* \sin\vartheta_2^* \cos(\varphi_2^* + \omega_2 t^*)}{r_1^*}\,,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1^* + \omega_1 t^*) = \frac{r_2^* \sin\vartheta_2^* \sin(\varphi_2^* + \omega_2 t^*)}{r_2^* \cos\vartheta_2^*}\,.$$

Auf diese Weise können beliebig viel Punkte der Ritzelflanke auf einfachste Weise (speziell auch durch Verwendung von Rechenautomaten) berechnet werden. Ein ganz analoges Schema ergibt sich auch bei der in Abschnitt 3 erwähnten Verwendung von Zylinderkoordinaten.

*5.* **Zusammenfassung.** In der vorliegenden Arbeit wird das Problem behandelt und gelöst, zu einer gegebenen Zahnflanke eines Hypoidgetriebes die zugehörige Gegenflanke rechnerisch exakt zu bestimmen. Die Lösung, die auf Grund des Enveloppen-Prinzips hergeleitet wird, wird dargestellt durch die Grundgleichungen (18)—(21). Diese können in verschiedener Weise verwendet werden. Als wichtigste Anwendung ergibt sich aus ihnen die unter b) auf S. 60 behandelte Parameterdarstellung in geschlossener Form für die Gegenflanke. Diese ist auch für die numerische Berechnung außerordentlich geeignet. Die geometrische Bedeutung dieser Parameterdarstellung ist die, daß man zu einem beliebigen Punkt der gegebenen Flanke zunächst als Parameter die Zeit berechnet, zu welcher er die Gegenflanke im Gegenpunkt berührt (im wesentlichen durch Auflösung einer quadratischen Gleichung), und daß man dann auf Grund der Kenntnis dieser Zeit nach den bekannten Transformationsformeln den Gegenpunkt selbst berechnet. Man erhält auf diese Weise schlußendlich also den Gegenpunkt in Abhängigkeit vom gegebenen Punkt.

(Eingegangen am 7. Juli 1952.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *P. Matthieu*, Berlin-Charlottenburg, Jebensstr. 1.

# Die Momentenfläche der elastischen Platte oder Pilzdecke und die Bestimmung der Durchbiegung aus den Momenten.

Von W. Müller.

**1. Einleitung.** In einer früheren Mitteilung[1] ist die Durchbiegung für mehrere Belastungsfälle von rechteckigen Platten und durchgehenden Pilzdecken dargestellt worden. In Ergängung dazu wollen wir vor allem zwei bemerkenswerte Sonderfälle herausgreifen, den Fall der frei aufliegenden Platte mit Punktbelastung (Einlastplatte) und die durchgehende Pilzdecke mit verschwindenden Stützflächen, um namentlich die Momentensumme oder die Niveaulinien der entsprechenden Flächen mit Hilfe der Thetafunktionen[2] bis zur zahlenmäßigen Auswertung zu ermitteln und schließlich an dem Sonderfall der vereinfachten Pilzdecke die Frage zu behandeln, wie man die Umkehrung der $\Delta$-Operation ($\Delta^{-1}$) in einem vorliegenden Fall auszuführen, d. h. die Durchbiegung aus den Momenten unter Beachtung der Randbedingungen berechnen kann.

**2. Die Momentendarstellung für die Einlastplatte.** Wir haben für die im Punkte $x_0 = a\,\xi_0$, $y_0 = a\,\eta_0$ durch eine Einzelkraft $P$ belastete, frei aufliegende rechteckige Platte mit den Seiten $a$ und $b$ die Durchbiegung

$$w = \frac{P\,a^3}{N\,\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi_0 \sin n\pi\xi}{n^3\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda} \{\mathfrak{Sin}\, n\pi(\lambda-\eta_0)\,[(1+n\pi\lambda\,\mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda)\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\eta - n\pi\eta\,\mathfrak{Cof}\, n\pi\eta] - n\pi(\lambda-\eta_0)\,\mathfrak{Cof}\, n\pi(\lambda-\eta_0)\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\eta\} \quad (1)$$

gefunden, wo $b/a = \lambda$ das Seitenverhältnis des Rechtecks bedeutet. Der auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist eine biharmonische Funktion, die in allen Stellen außerhalb des Lastpunktes der Gleichung

$$\Delta\Delta w = 0 \quad (2)$$

genügt. Dabei ist, wie die Ableitung ergab, $\eta < \eta_0$ vorausgesetzt. Für $\eta > \eta_0$ erhält man den Ausdruck für $w$ durch Vertauschung von $\eta$ und $\eta_0$.

Für die Momentensumme $M$ ergibt sich dann

$$M = \frac{m_x + m_y}{1+\nu} = -N\,\Delta w = \frac{2\,P}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi_0 \sin n\pi\xi\;\mathfrak{Sin}\, n\pi\eta\;\mathfrak{Sin}\, n\pi(\lambda-\eta_0)}{n\,\mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda}. \quad (3)$$

Wenn man die komplexen Größen $\zeta = \xi + i\,\eta$, $\zeta_0 = \xi_0 + i\,\eta_0$ und die entsprechenden konjugiert komplexen Koordinaten $\bar{\zeta} = \xi - i\,\eta$, $\bar{\zeta}_0 = \xi_0 - i\,\eta_0$ einführt und den Realteil einer komplexen Größe mit $\mathfrak{Re}$ bezeichnet, so kann man für den Zähler unter dem Summenzeichen folgenden Ausdruck setzen:

$$\frac{1}{4}\,\mathfrak{Re}\,[\cos n\pi(\zeta-\zeta_0+i\lambda) + \cos n\pi(\zeta+\zeta_0-i\lambda) - \cos n\pi(\zeta-\bar{\zeta}_0-i\lambda) - \cos n\pi(\zeta+\bar{\zeta}_0+i\lambda)].$$

In der Theorie der elliptischen Funktionen[2] ist es üblich, das Periodenverhältnis $\tau$ und die Größe $q = e^{i\pi\tau}$ einzuführen. In unserem Falle des Periodenrechtecks wird $\tau = i\,\lambda = i\,b/a$, also $q = e^{-\pi\lambda}$. Dann erhalten wir

$$M = \frac{P}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\,\mathfrak{Re}\,[\cos n\pi(\zeta-\zeta_0+i\lambda) + \cos n\pi(\zeta+\zeta_0-i\lambda) - \cos n\pi(\zeta-\bar{\zeta}_0-i\lambda) - \cos n\pi(\zeta+\bar{\zeta}_0+i\lambda)]. \quad (4)$$

Benutzt man nun die bekannte Reihenentwicklung für den Logarithmus der $\vartheta_0$-Funktion

$$\ln\vartheta_0(w) = \sum_{1}^{\infty} \ln(1-q^{2n}) - 2\sum_{1}^{\infty} \frac{q^n \cos 2\pi n w}{n(1-q^{2n})} \quad (5)$$

---

[1] *W. Müller*, Ing.-Arch. 20, (1952) S. 278.

[2] Vgl. etwa *G. H. Halphen*, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Bd. I, Paris 1886—91; ferner *Fr. Tricomi*, Elliptische Funktionen S. 156f, Leipzig 1948; *Fr. Oberhettinger—W. Magnus*, Anwendungen der elliptischen Funktionen auf Physik und Technik S. 13 und 35—37, Berlin 1948.

und weiter die Formel

$$\vartheta_0\left(w \pm \frac{1}{2}\tau\right) = \pm i\, q^{-1/4}\, e^{\mp i\pi v}\, \vartheta_1(w)\,, \tag{6}$$

indem man für $w$ die Argumente $\frac{1}{2}(\zeta-\zeta_0)$, $\frac{1}{2}(\zeta+\zeta_0)$, $\frac{1}{2}(\zeta-\bar{\zeta}_0)$, $\frac{1}{2}(\zeta+\bar{\zeta}_0)$ und $\tau = i\lambda$ setzt, so sieht man, daß nach Weghebung der in (6) auftretenden Faktoren von $\vartheta_1$ die Momentenfunktion in der übersichtlichen Form sich darstellt

$$w = \frac{P}{2\pi}\,\mathfrak{Re}\,\ln\frac{\vartheta_1\left(\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta+\bar{\zeta}_0}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{2}\right)\vartheta_1\left(\frac{\zeta+\zeta_0}{2}\right)}. \tag{7}$$

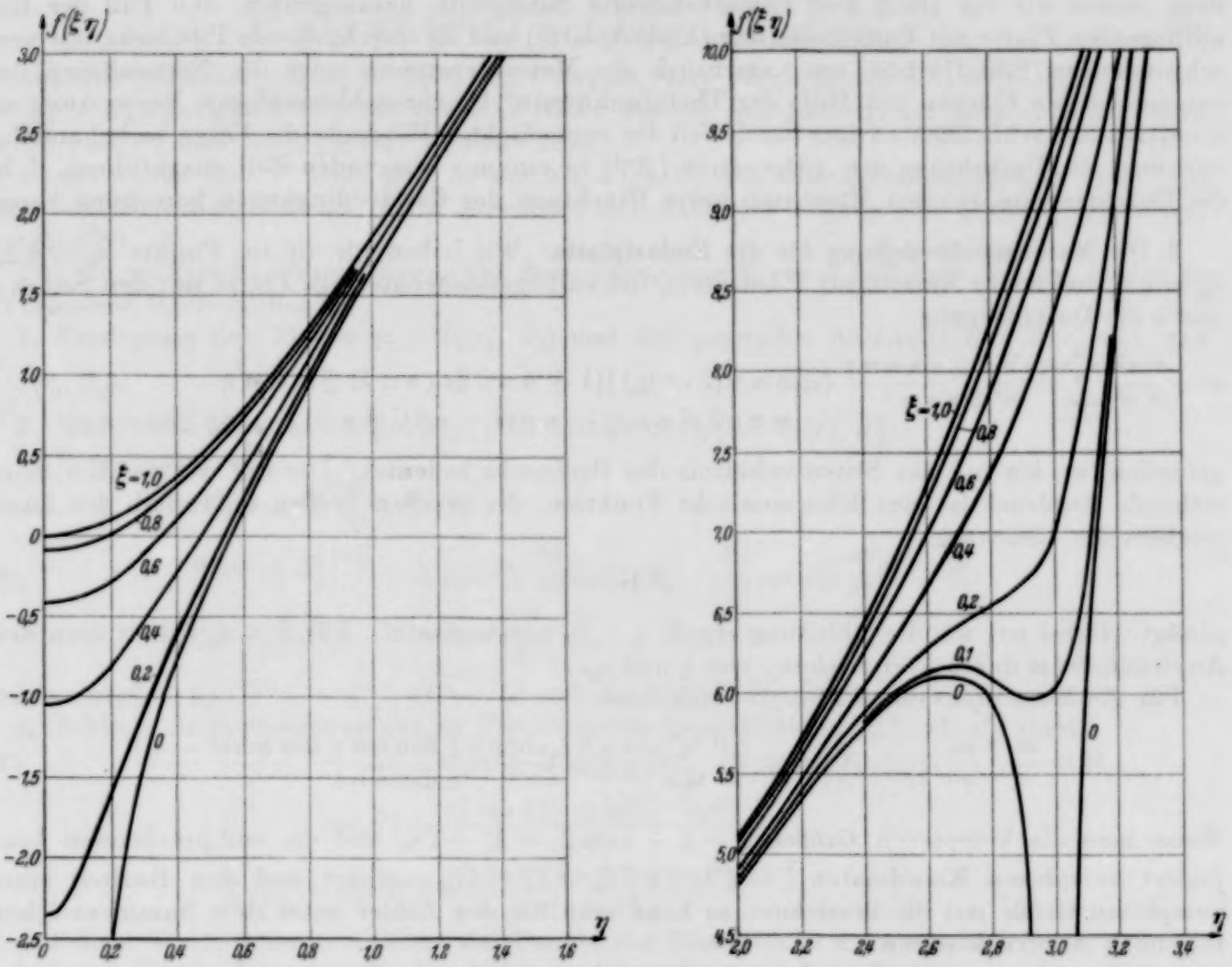



Abb. 1. Darstellung der Funktion $f(\xi\,\eta) = 2\ln|\,\vartheta_1(\zeta/2)\,| + k_0$.
a) für kleine Werte von $\eta$ ($< 2$). b) für größere Werte von $\eta$ ($> 2$).

Da diese Funktion nur von den absoluten Werten der $\vartheta_1$-Funktionen abhängt, so weist man leicht nach, daß die Unterscheidung der Gebiete $\eta \lessgtr \eta_0$ überflüssig wird, oder daß die Formel im ganzen Gebiet des Rechtecks Gültigkeit hat. Die z. B. aus der Membrantheorie bekannte Formel (7) findet sich auch in der sehr umfassenden Arbeit von *Fr. Tölke*, in der wohl zum ersten Mal die $\vartheta$-Funktionen auf viele Einzelfälle aus der Plattentheorie angewendet werden[1]. Statt der $\vartheta$-Funktionen kann man übrigens auch die $\sigma$-Funktionen mit veränderten Argumenten und schließlich auch die *Weierstraß*schen $p$-Funktionen einführen. Es wird dann

$$M = \frac{P}{2\pi}\,\mathfrak{Re}\,\ln\frac{\sigma(z-\bar{z}_0)\,\sigma(z+\bar{z}_0)}{\sigma(z-z_0)\,\sigma(z+z_0)} = \frac{P}{2\pi}\ln\frac{p(z)-p(\bar{z}_0)}{p(z)-p(z_0)}\,. \tag{8}$$

Diese Darstellung findet sich in einer verwandten hydrodynamischen Untersuchung von *G. Jaffé* und *W. Müller*[2].

---

[1] *F. Tölke*, Ing.-Arch. 5 (1934), S. 187.

[2] *G. Jaffé*, Ann. Physik (4), 61, (1920), S. 173; *W. Müller*, Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), S. 447 und 10 (1930), S. 227.

Zur praktischen Berechnung der $M$-Fläche geht man am zweckmäßigsten auf die $\vartheta_1$-Reihe zurück:

$$\vartheta_1(w) = 2\sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi w = 2q^{1/4}(\sin\pi w - q^2\sin 3\pi w + q^6\sin 5\pi w - \cdots). \quad (9)$$

Wenn man etwa $\lambda = 1{,}5$ setzt, so wird $q = 0{,}00898$, und man sieht, daß man sich wegen der ausgezeichneten Konvergenz auf die beiden ersten Glieder der Reihe beschränken kann. Man hat dann mit $w = u + iv$

$$\vartheta_1(w) \approx 2q^{1/4}[\sin\pi u\,\mathfrak{Cof}\,\pi v + i\cos\pi u\,\mathfrak{Sin}\,\pi v - q^2(\sin 3\pi u\,\mathfrak{Cof}\,3\pi v + i\cos 3\pi u\,\mathfrak{Sin}\,3\pi v)]. \quad (10)$$

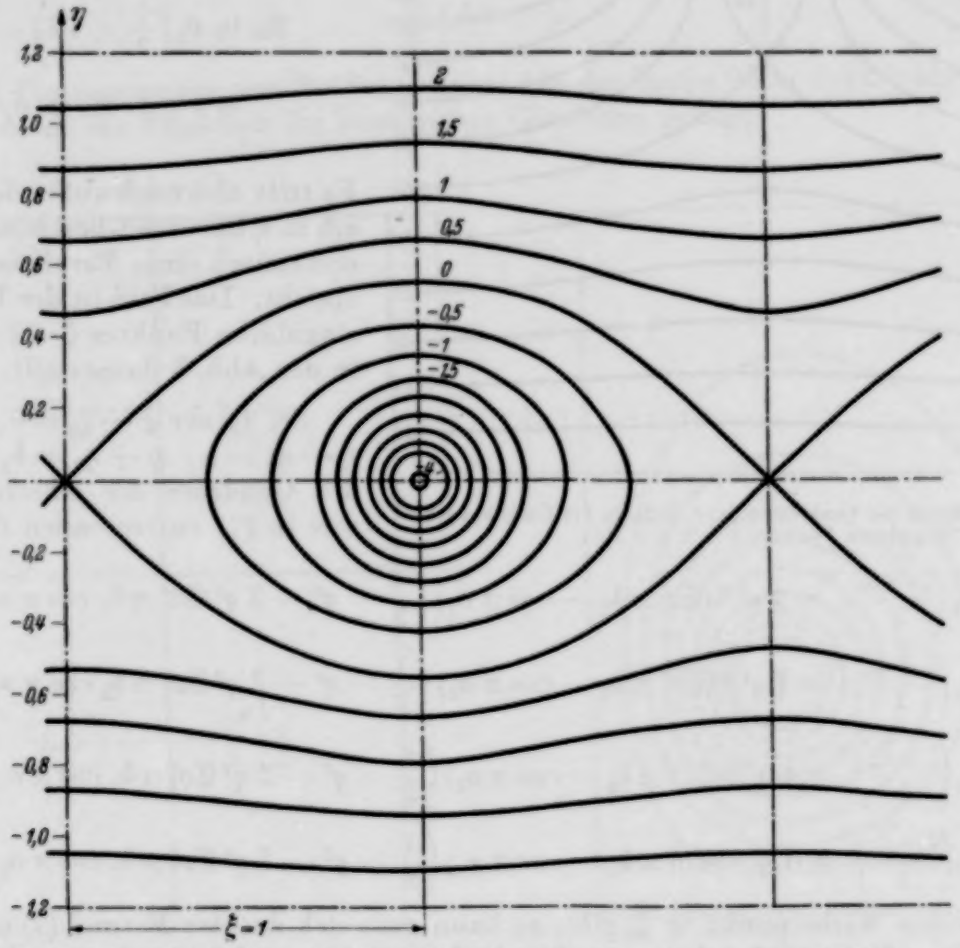



Abb. 2. Niveaulinien der Funktion $2\ln|\vartheta_1(\zeta/2)|$ in der Umgebung des singulären Punktes $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Setzt man $\vartheta_1 = \varphi_1 + i\psi_1$, so wird

$$\varphi_1 = 2q^{1/4}(\sin\pi u\,\mathfrak{Cof}\,\pi v - q^2\sin 3\pi u\,\mathfrak{Cof}\,3\pi v),$$
$$\psi_1 = 2q^{1/4}(\cos\pi u\,\mathfrak{Sin}\,\pi v - q^2\cos 3\pi u\,\mathfrak{Sin}\,3\pi v).$$

Daraus folgt nach entsprechender Umformung und Reduktion auf die Argumente mit $n = 2$

$$|\vartheta_1(w)|^2 = \varphi_1^2 + \psi_1^2 \approx 4q^{1/2}(\mathfrak{Cof}\,2\pi v - \cos 2\pi u)\left(\frac{1}{2} - q^2 - 2q^2\,\mathfrak{Cof}\,2\pi v\cos 2\pi u\right). \quad (11)$$

Mit $w = \zeta/2$ findet man also

$$\left|\vartheta_1\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|^2 \approx 4q^{1/2}(\mathfrak{Cof}\,\pi\eta - \cos\pi\xi)\left(\frac{1}{2} - q^2 - 2q^2\,\mathfrak{Cof}\,\pi\eta\cos\pi\xi\right). \quad (12)$$

Wir haben zunächst die Funktion

$$2\ln\frac{\left|\vartheta_1\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right|}{2q^{1/4}} = 2\ln\left|\vartheta_1\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right| + k_0 = f(\xi\eta)$$

für eine Reihe von $\xi$-Werten in Abhängigkeit von $\eta$ berechnet (Abb. 1) und daraus die Niveaulinien der Funktionen $2\lg\vartheta_1(\zeta/2)$ veranschaulicht in der Umgebung des singulären Punktes $\zeta = 0$,

in dem $\vartheta_1$ verschwindet, also $\ln \vartheta_1(\zeta/2)$ negativ unendlich wird (Abb. 2). Im ganzen ist das Feld periodisch mit der Periode $2a$ und gleichwertig mit der Potentialströmung einer unendlichen Reihe von äquidistanten Wirbeln in den Punkten $x = 0, 2a, 4a$ usw.

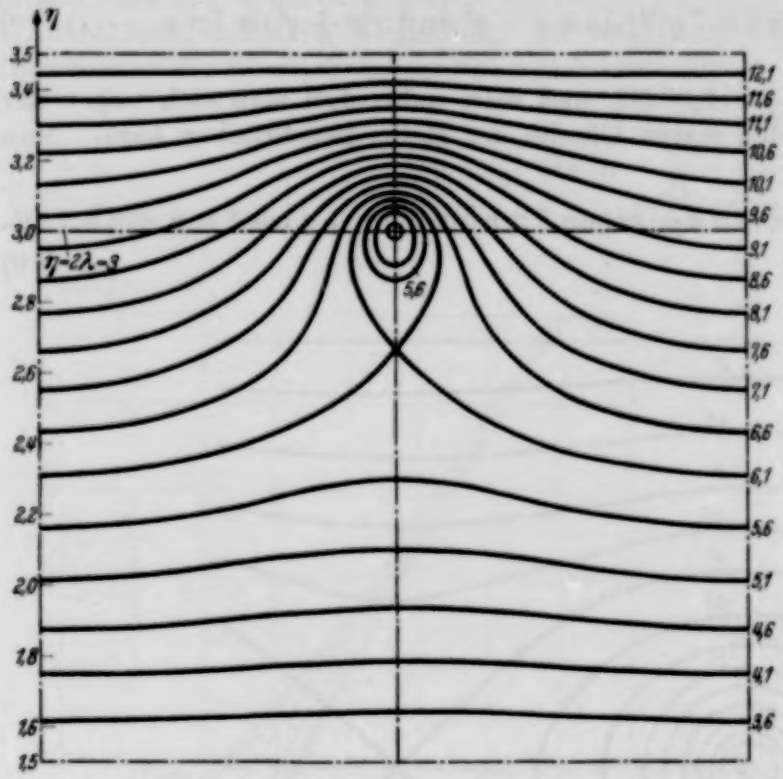



Abb. 3. Niveaulinien der Funktion $2 \ln |\vartheta_1(\zeta/2)|$ in der Umgebung des singulären Punktes $\xi = 0$, $\eta = 2\lambda$.

Eine zweite Wirbelreihe liegt in den Punkten $\zeta = 2n + 2i\lambda$. Aber in der $\eta$-Richtung herrscht keine reine Periodizität. Aus der Formel

$$\vartheta_1(w + \tau) = -q^{-1} e^{-2i\pi w} \vartheta_1(w)$$

ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \Re\mathrm{e} \ln \vartheta_1\left(\frac{\zeta}{2} + i\lambda\right) &= \ln q^{-1} \\ &+ \pi\eta + \Re\mathrm{e} \ln \vartheta_1\left(\frac{\zeta}{2}\right). \end{aligned}\right| \qquad (13)$$

Es tritt also noch außer der Konstanten ein in $\eta$ lineares Glied hinzu, das hydrodynamisch einer Parallelströmung entspricht. Das Feld in der Umgebung des singulären Punktes $\zeta = 2i\lambda$ haben wir in der Abb. 3 dargestellt.

Sei ferner $\xi - \xi_0 = 0$, $\xi + \xi_0 = a_2$, $\eta - \eta_0 = b$, $\eta + \eta_0 = b_2$, so werden die Quadrate der Absolutbeträge der vier in (7) auftretenden $\vartheta_1$-Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \left|\vartheta_1\left(\frac{\zeta - \zeta_0}{2}\right)\right|^2 &\approx 4 q^{1/2} (\mathfrak{Cof}\, \pi b_1 - \cos \pi a_1)\left(\frac{1}{2} - q^2 - 2 q^2 \mathfrak{Cof}\, \pi b_1 \cos \pi a_1\right), \\ \left|\vartheta_1\left(\frac{\zeta + \zeta_0}{2}\right)\right|^2 &\approx 4 q^{1/2} (\mathfrak{Cof}\, \pi b_2 - \cos \pi a_2)\left(\frac{1}{2} - q^2 - 2 q^2 \mathfrak{Cof}\, \pi b_2 \cos \pi a_2\right), \\ \left|\vartheta_1\left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}_0}{2}\right)\right|^2 &\approx 4 q^{1/2} (\mathfrak{Cof}\, \pi b_2 - \cos \pi a_1)\left(\frac{1}{2} - q^2 - 2 q^2 \mathfrak{Cof}\, \pi b_2 \cos \pi a_1\right), \\ \left|\vartheta_1\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}_0}{2}\right)\right|^2 &\approx 4 q^{1/2} (\mathfrak{Cof}\, \pi b_1 - \cos \pi a_2)\left(\frac{1}{2} - q^2 - 2 q^2 \mathfrak{Cof}\, \pi b_1 \cos \pi a_2\right). \end{aligned}\right| \qquad (14)$$

Da $\frac{1}{2}(\zeta - \zeta_0)$ einen Wirbelpunkt in $\zeta_0$ gibt, so kann man sich das der Formel (7) entsprechende System der Niveaulinien dadurch entstanden denken, daß man dem im Lastpunkt des Grundrechtecks gelegenen Wirbel die drei durch einmalige und zweimalige Spiegelung an den Seiten $\xi = 0$, $\eta = 0$ entstandenen Wirbel hinzufügt, wobei bei einmaliger Spiegelung der Drehsinn des Wirbels sich umkehrt (Abb. 4).

Die Abb. 5 bezieht sich ferner auf die Höhenschichtlinien der Momentenfläche für den Fall $\lambda = 1{,}5$, $\xi_0 = 0{,}4$, $\eta_0 = 0{,}5$. Der Verlauf dieser den singulären Punkt $\zeta = \zeta_0$ umgebenden Linien, zu denen übrigens bei freier Auflagerung auch die Grenzen des Rechtecks gehören, wo $M$ verschwindet, hat eine Ähnlichkeit mit den Höhenschichtlinien der $w$-Fläche, unterscheiden sich aber von diesen Linien namentlich in der Umgebung des Lastpunktes, da für $w$ hier der Grenzwert [1]

$$w_0 = \frac{P}{8\pi N} r^2 \ln r \qquad (15)$$

zu nehmen ist, wenn unter $r$ eines Nachbarpunktes vom Angriffspunkt, also $|r| = |\zeta - \zeta_0|$ zu verstehen ist, währernd $M$ in der Nähe von $\zeta = 0$ durch

$$M_0 = -\frac{P}{2\pi} \ln r$$

dargestellt werden kann. Man sieht, daß $w$ für $r \to 0$ verschwindet, während $M$ unendlich groß wird. Der Lastpunkt ist also für $w$ keine eigentliche Singularität; er hat aber für das

[1] Vgl. *A. Pucher*, Ing.-Arch. 12 (1941), S. 76f; ferner *A. Pucher*, Einflußfelder elastischer Platten, Wien 1951.

Moment den Charakter eines Wirbelpunktes, dem die $M$-Linien mit ins Unendliche wachsender Dichte sich asymptotisch annähern.

**3. Die Momentenfläche für eine durchlaufende Pilzdecke mit Punktstützen.** Wenn man den Ursprung der Koordinaten in den Mittelpunkt des Periodenrechtecks $2a \cdot 2b$ legt, deren vier Eckpunkte mit den Punktstützen zusammenfallen und wenn man die früheren Bezeichnungen einführt, so erhält man die Durchbiegung für diesen Fall in Form

$$w = w_0 + \frac{p\,b^4}{2\,4\,N}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2\right]^2 - \frac{p\,a^3\,b}{N\,\pi^3}\sum' \frac{(-1)^n \cos n\,\pi\,\xi}{n^3\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,\lambda}\,[(1 + n\,\pi\,\lambda\,\mathfrak{Ctg}\,n\,\pi\,\lambda)\,\mathfrak{Cof}\,n\,\pi\,\eta - n\,\pi\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,\eta]\,, \quad (16)$$

deren erster Fall Teil als Partikularlösung der inhomogenen Gleichung

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{N}$$

sich auf einen Plattenstreifen parallel der $x$-Achse von der Breite $2b$ bezieht, während der zweite Teil als biharmonische Funktion der homogenen Gleichung genügt.

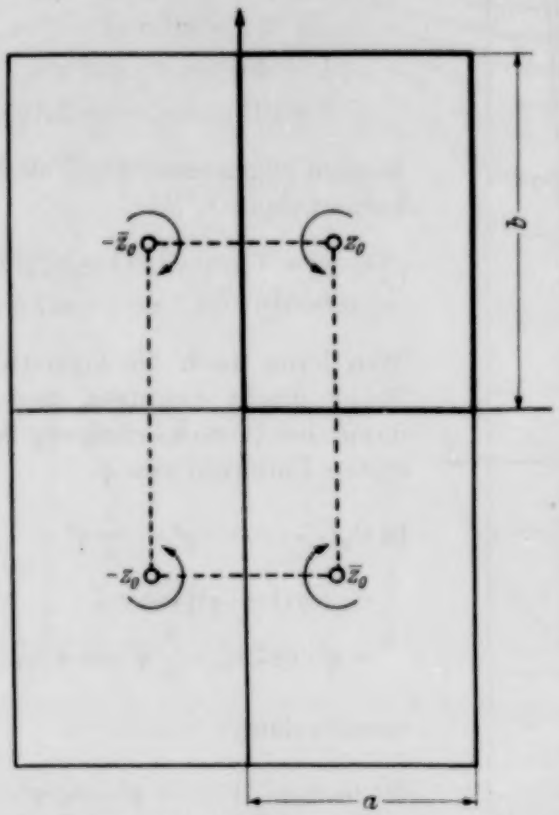



Abb. 4. Zum Spiegelungsprinzip bei der Konstruktion der Momentenfläche einer Einlastplatte.

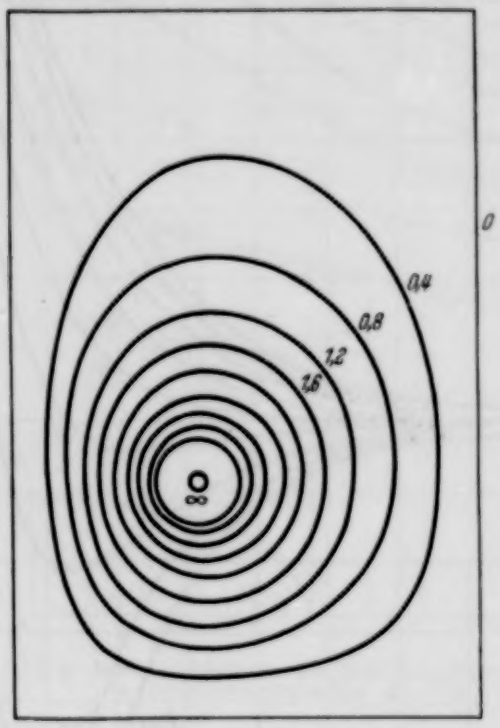



Abb. 5. Höhenlinien der Momentenfläche der Einlastplatte. ($\lambda = 1{,}5$, $\xi = 0{,}4$, $\eta_0 = 0{,}5$)

(42)

Daraus folgt dann für das Moment

$$M = p\,a^2\left(\frac{1}{6}\lambda^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right) - \frac{2\,p\,a\,b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n \cos n\,\pi\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,n\,\pi\,\eta}{n\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,\lambda} = M_1 + M_2\,. \quad (17)$$

Mit Einführung von $q$ haben wir ferner

$$M = p\,a^2\left(\frac{1}{6}\lambda^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right) - \frac{4\,p\,a\,b}{\pi}\,\Re\mathfrak{e}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n\,q^n \cos n\,\pi\,\zeta}{n(1-q^{2n})}\,. \quad (18)$$

Die rechts stehende Summe kann man durch den Logarithmus der Funktion $\vartheta_3(\zeta/2)$ ausdrücken entsprechend der Formel

$$\ln\vartheta_3(w) = \sum_{1}^{\infty}{}' \ln(1-q^{2n}) - 2\sum_{1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^n\,q^n \cos 2\,n\,\pi\,w}{n(1-q^{2n})}\,. \quad (19)$$

Dann wird

$$M = -\,p\,a\,b\left[\frac{\eta^2}{2\,\lambda} - \frac{\lambda}{6} - 2\,\Re\mathfrak{e}\ln\vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right)\right] = p\,a\,b\,F_m\,. \quad (20)$$

Setzen wir $\vartheta_3(\zeta/2) = \varphi_3 + i\,\psi_3$, so können wir schreiben

$$F_m = \ln(\varphi_3^2 + \psi_3^2) + \frac{\lambda}{6} - \frac{\eta^2}{2\lambda}.$$

Benutzen wir ferner die $\vartheta_3$-Reihe

$$\vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos n\pi\zeta = 1 + 2\,q\cos\pi\zeta + 2\,q^4\cos 2\pi\zeta + 2\,q^9\cos 3\pi\zeta, \qquad (21)$$

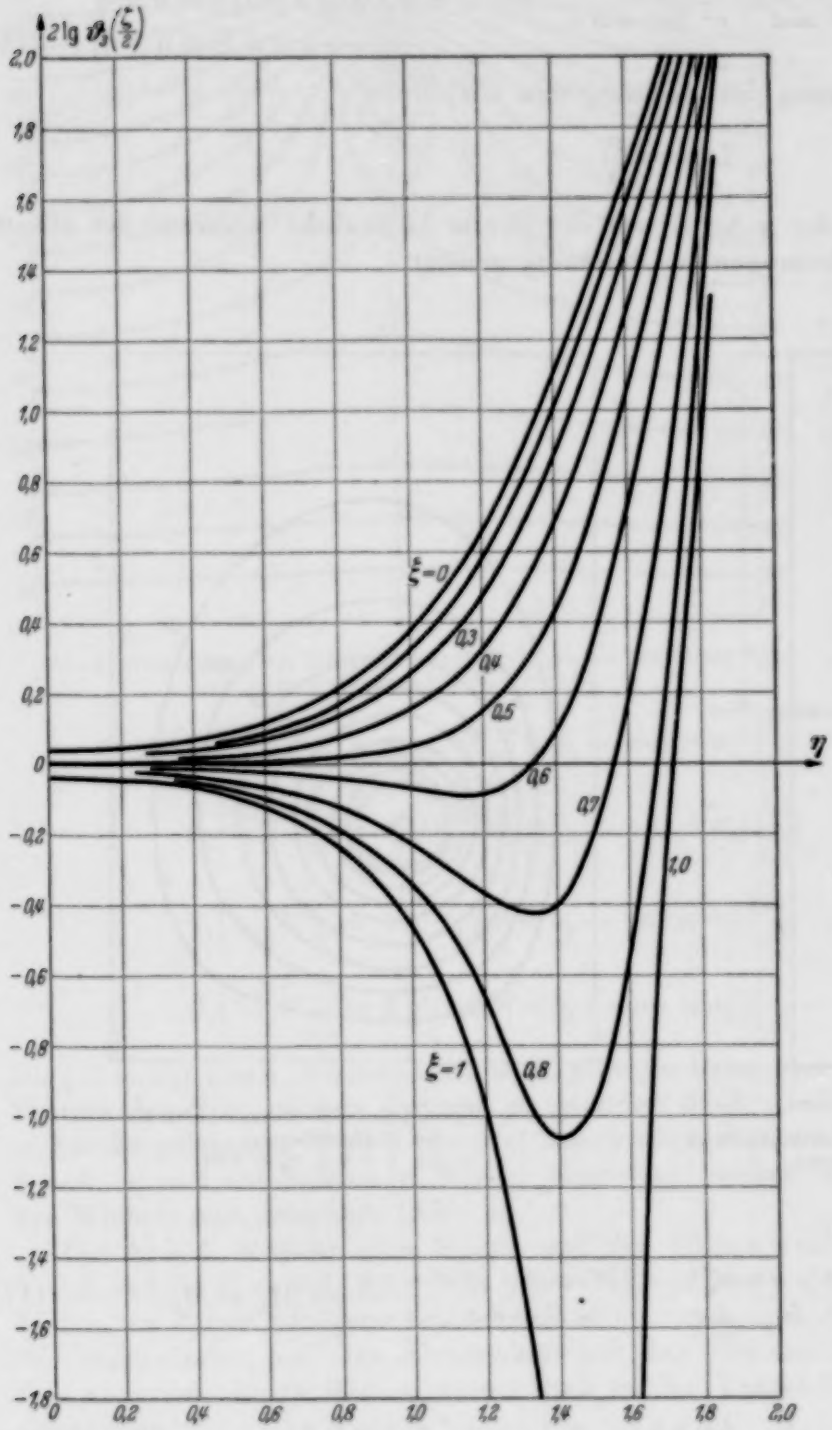



Abb. 6. Darstellung der Funktion $2\ln|\vartheta_3(\zeta/2)|$ in Abhängigkeit von $\xi$ und $\eta$.

so wird bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von $q$

$$\varphi_3 \approx 1 + 2\,q\cos\pi\xi\,\mathfrak{Cof}\,\pi\eta,$$
$$\psi_3 \approx -2\,q\sin\pi\xi\,\mathfrak{Sin}\,\pi\eta,$$

also

$$\left.\begin{aligned}\varphi_3^2 + \psi_3^2 \approx\ & 1 + 4\,q\cos\pi\xi\,\mathfrak{Cof}\,\pi\eta \\ & + 4\,q^2(\cos^2\pi\xi\,\mathfrak{Cof}^2\pi\eta \\ & + \sin^2\pi\xi\,\mathfrak{Sin}^2\pi\eta) \\ =\ & 1 + 4\,q\cos\pi\xi\,\mathfrak{Cof}\,\pi\eta \\ & + 2\,q^2(\mathfrak{Cof}\,2\pi\eta + \cos 2\pi\xi).\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

In dem angenommenen Fall $\lambda = 1{,}5$ kommt dann z. B.

$$\varphi_3^2 + \psi_3^2 \approx 1 + 0{,}0359\cos\pi\xi\,\mathfrak{Cof}\,\pi\eta + 0{,}00016(\mathfrak{Cof}\,2\pi\eta + \cos 2\pi\xi). \qquad (23)$$

Man kann auch die logarithmische Reihe direkt benutzen und erhält damit bei Berücksichtigung der vier ersten Potenzen von $q$

$$\left.\begin{aligned}\ln\vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right) =\ & -q^2 - \frac{3}{2}q^4 \\ & + 2\,q(1+q^2)\cos\pi\zeta \\ & - q^2\cos 2\pi\zeta + \frac{2}{3}\,q^3\cos 3\pi\zeta,\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

woraus dann

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Re}\ln\vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right) =\ & -q^2 - \frac{3}{2}q^4 \\ & + 2\,q(1+q^2)\cos\pi\xi\,\mathfrak{Cof}\,\pi\eta \\ & - q^2\cos 2\pi\xi\,\mathfrak{Cof}\,2\pi\eta \\ & + \frac{2}{3}q^3\cos 3\pi\xi\,\mathfrak{Cof}\,3\pi\eta\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

sich ergibt.

Wir haben zunächst in Abb. 6 den Verlauf der Funktion $2\ln\vartheta_3(\zeta/2)$ für verschiedene Werte von $\xi$ in Abhängigkeit von $\eta$ und daraus die Niveaulinien in der Umgebung des singulären Punktes $\zeta = 1 + i\lambda$ aufgezeichnet (Abb. 7), in dem entsprechend der Beziehung

$$\vartheta_3\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \qquad (26)$$

der Logarithmus negativ unendlich wird. Im Ganzen erhalten wird das Strömungsbild einer Reihe von gleichsinnigen Wirbelpaaren ($\zeta = \pm(1 + 2\,n + i\,\lambda)$), die symmetrische zur $\xi$- und $\eta$-Achse liegen. In Abb. 7 ist nur der Teil $0 < \xi < 2$, $\eta > 0$ dargestellt. Das vollständige Feld ergibt sich durch periodische Vervielfachung in der positiven und negativen $\xi$-Richtung und

durch Spiegelung an der $\eta$-Achse. Für größere Werte von $\eta$ gilt die Beziehung

$$\Re\mathrm{e}\,\ln\vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}+i\lambda\right)=\ln q^{-1}+\pi\eta+\Re\mathrm{e}\,\ln\vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right). \tag{27}$$

Übrigens geben die Funktionen $\vartheta_0(\zeta/2)$ und $\vartheta_2(\zeta/2)$ die gleichen Bilder wie die benutzten Funktionen, nur mit veränderter Koordinatenlage, entsprechend den Umrechnungsformeln

$$\vartheta_0\left(w+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(w)\,,\qquad \vartheta_1\left(w+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2(w)\,. \tag{28}$$

Aus den Werten von $\ln\vartheta_3(\zeta/2)$ sind dann die entsprechenden Werte der Momentenfunktion $F_m$ (vgl. Tabelle) berechnet und die Höhenschichtlinien des Momentes für den vierten Teil des Perioden-

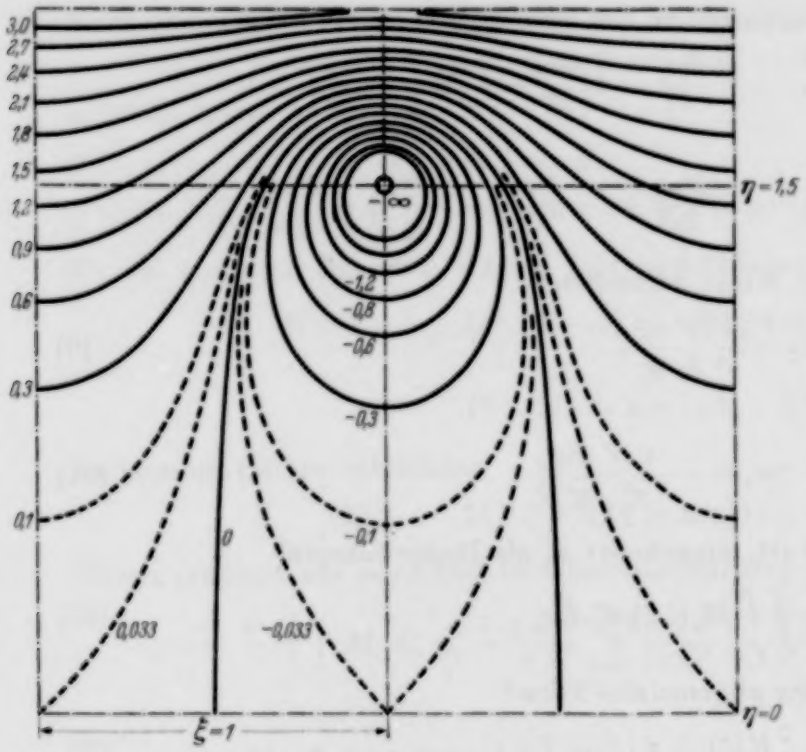



Abb. 7. Niveaulinien der Funktion $2\ln|\vartheta_3(\zeta/2)|$ in der Umgebung der singulären Stelle $\xi=1$, $\eta=1{,}5$.

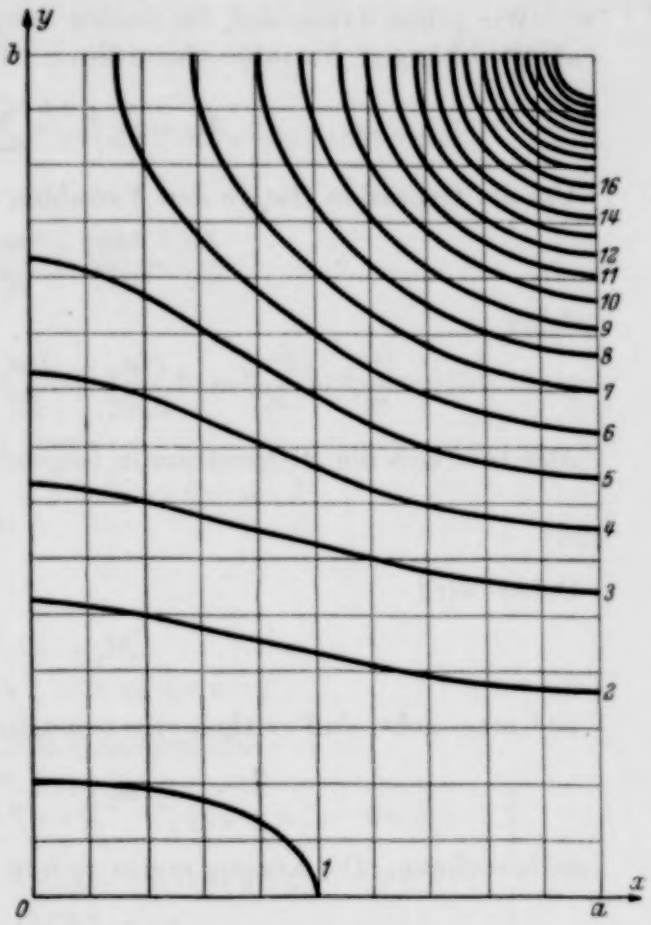



Abb. 8. Höhenschichtlinien der Momentenfläche einer durchlaufenden Pilzdecke ($\lambda=1{,}5$).

rechtecks aufgezeichnet (Abb. 8). Die Vervollständigung des Bildes ist durch Spiegelung an den Rechteckseiten leicht herzustellen. Die Kurvenschaar unterscheidet sich wieder von der entsprechenden, zur Durchbiegung $w$ gehörenden und früher dargestellten Schaar durch den singulären Charakter des Punktes $\xi=1$, $\eta=\lambda$, dem eine ins Unendliche gehende Spitze der Momentenfläche zugehört. Erst bei Berücksichtigung der endlichen Stützfläche wird das Moment überall einen endlichen Wert annehmen.

Für die Mitte des Rechtecks ($\xi=\eta=0$) wird $F_m=0{,}261$. Die konstante Differenz für $F_m$ zwischen zwei benachbarten $F_m$-Linien beträgt $-0{,}2/\pi=-0{,}0637$. Das Vorzeichen wechselt ungefähr längs der Linie 5.

*Tabelle der Momentenfunktion $F_m$ bei der Pilzdecke.*

| $\eta$ | $\xi=0{,}1$ | $\xi=0{,}2$ | $\xi=0{,}3$ | $\xi=0{,}4$ | $\xi=0{,}5$ | $\xi=0{,}6$ | $\xi=0{,}7$ | $\xi=0{,}8$ | $\xi=1{,}0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,261 | 0,2608 | 0,2567 | 0,2536 | 0,250 | 0,2465 | 0,2436 | 0,2407 | 0,2380 |
| 0,2 | 0,2503 | 0,2477 | 0,2447 | 0,2410 | 0,2366 | 0,2325 | 0,2285 | 0,2254 | 0,2228 |
| 0,4 | 0,2180 | 0,2140 | 0,2094 | 0,2036 | 0,1969 | 0,1900 | 0,1836 | 0,1791 | 0,1746 |
| 0,6 | 0,1675 | 0,1605 | 0,1528 | 0,1394 | 0,1310 | 0,1224 | 0,1076 | 0,0985 | 0,0901 |
| 0,8 | 0,1019 | 0,0882 | 0,0774 | 0,0592 | 0,0382 | 0,0161 | —0,0057 | —0,0245 | —0,0406 |
| 1,0 | 0,0366 | 0,0188 | —0,0032 | —0,0328 | —0,0702 | —0,1078 | —0,1550 | —0,1933 | —0,2315 |
| 1,2 | —0,0212 | —0,0468 | —0,0791 | —0,1290 | —0,1857 | —0,2600 | —0,3471 | —0,4372 | —0,5450 |
| 1,4 | —0,0551 | —0,0866 | —0,1268 | —0,1866 | —0,2690 | —0,3800 | —0,5330 | —0,7422 | —1,2740 |
| 1,5 | —0,0598 | —0,0920 | —0,1337 | —0,1950 | —0,2793 | —0,3990 | —0,5631 | —0,8080 | $-\infty$ |

**4. Die Ableitung der Biegefläche aus der Momentenfläche.** Im Allgemeinen wird es möglich sein, z. B. bei einer rechteckigen Platte mit Punktbelastung die Funktion $M$ als Potentialfunktion oder als Realteil einer komplexen Funktion $W = M + i\,N$ mit Hilfe der bekannten Singularitätenmethode und des Spiegelungsprinzips aufzustellen. Nicht so einfach gestaltet sich die Ableitung der im Allgemeinen biharmonischen Funktion $w$ aus der Momentensumme. Wir wollen hier ein Verfahren angeben und auf den Fall der Pilzdecke anwenden, mit dem es durch eine doppelte Integration möglich sein wird, die Biegefläche aufzufinden. Dabei können wir uns auf das zweite Glied $M_2$ in dem Ausdruck für $M$ beschränken, weil der sich auf den Plattenstreifen sich beziehende Teil $M_1$ ohne Schwierigkeit $w_1$ zu berechnen gestattet.

Wir gehen davon aus, die beiden konjugiert komplexen Größen $\zeta = \xi + i\,\eta$ und $\bar{\zeta} = \xi - i\,\eta$ als unabhängige Variable einzuführen. Damit können wir zunächst $M_2$ die Form geben

$$M_2 = -\frac{p\,a\,b}{\pi} \sum \frac{(-1)^n (\cos n\,\pi\,\zeta + \cos n\,\pi\,\bar{\zeta})}{n\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,\lambda}\,. \tag{29}$$

Um die Operation $\Delta w_2$ in den Variablen darzustellen, hat man

$$\frac{\partial w_2}{\partial \xi} = \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_2}{\partial \bar{\zeta}}\,, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = i\left(\frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_2}{\partial \bar{\zeta}}\right),$$

daher

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} + 2\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta\,\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \bar{\zeta}^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 w_2}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} + 2\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta\,\partial \bar{\zeta}} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial \bar{\zeta}^2}\,.$$

Also läßt sich die $\Delta$-Operation in folgender Weise darstellen:

$$\Delta w_2 = \frac{4}{a^2}\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta\,\partial \bar{\zeta}}\,. \tag{30}$$

Daher wird

$$M_2 = -N\,\Delta w_2 = -\frac{4\,N}{a^2}\,\frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta\,\partial \bar{\zeta}}\,, \tag{31}$$

und man sieht, daß es theoretisch möglich ist, umgekehrt $w_2$ als Doppelintegral

$$w_2 = -\frac{a^2}{4\,N} \int\int M_2(\zeta\,\bar{\zeta})\,d\zeta\,d\bar{\zeta} \tag{32}$$

zu berechnen. Die Lösung ergibt sich in der allgemeinen Form[1]

$$w_2 = \zeta\,F(\bar{\zeta}) + \bar{\zeta}\,F(\zeta) + f_1(\zeta) + f_2(\bar{\zeta})\,. \tag{33}$$

Die Schwierigkeit besteht nur darin, die auftretenden willkürlichen Funktionen den Randbedingungen anzupassen. Wenn wir (26) in (29) einsetzen, erhalten wir zunächst für $w_2$ folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} w_2 &= -\frac{a^3\,b}{4\,N} \sum \frac{(-1)^n}{(\pi\,n)\,\mathfrak{Sin}^3\,n\,\pi\,\lambda} [n\,\pi\,\bar{\zeta}\,\sin n\,\pi\,\zeta + n\,\pi\,\zeta\,\sin n\,\pi\,\bar{\zeta} + f_1(\zeta) + f_2(\bar{\zeta})] \\ &= -\frac{a^3\,b}{4\,N} \sum \frac{(-1)^n\,G(\zeta\,\bar{\zeta})}{(\pi\,n)^3\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Die Funktionen $f_1$ und $f_2$ müssen so bestimmt werden, daß $\partial G/\partial \xi$ und $\partial G/\partial \eta$ für $\xi = 0$ und 1 und für $\eta = 0$ und $\lambda$ verschwinden. Wir haben aber

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \xi} &= 2\,n\,\pi\,\sin n\,\pi\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,n\,\pi\,\eta - 2\,(n\,\pi)^2\,\eta\,\sin n\,\pi\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,\eta \\ &\quad + 2\,(n\,\pi)^2\,\xi\,\cos n\,\pi\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,n\,\pi\,\eta + f_1'(\zeta) + f_2'(\bar{\zeta})\,, \\ \frac{\partial G}{\partial \eta} &= 2\,n\,\pi\,\cos n\,\pi\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,\eta + 2\,(n\,\pi)^2\,\xi\,\sin n\,\pi\,\xi\,\mathfrak{Sin}\,n\,\pi\,\eta \\ &\quad + 2\,(n\,\pi)^2\,\eta\,\cos n\,\pi\,\xi\,\mathfrak{Cof}\,n\,\pi\,\eta + i[f_1'(\zeta) - f_2'(\bar{\zeta})]\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Für den Mittelpunkt des Periodenrechtecks wird also

$$f_1'(i\,\eta) + f_2'(-i\,\eta) = 0\,; \qquad f_1(\zeta) - f_2'(\zeta) = 0\,.$$

[1] Vgl. auch *W. Müller*, Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten, S. 121 f., 215, Leipzig 1932.

Daraus folgt aber, daß man $f_1 = f_2 = f$ setzen kann, und daß $f$ eine gerade und $f'$ eine ungerade Funktion darstellt. Setzt man $f = \varphi + i\,\psi$, so folgt aus

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{\xi=1} = 2(n\pi)^2 \cos n\pi\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\eta + f'(\lambda + i\eta) + f'(\lambda - i\eta) = 0$$

die Beziehung

$$\varphi'(1,\eta) = -(n\pi)^2 \cos n\pi\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\eta\,, \tag{36}$$

ebenso aus

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_{\eta=\lambda} = 2\,n\pi \cos n\pi\xi\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda(1 + n\pi\lambda\, \mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda) + 2(n\pi)^2 \xi \sin n\pi\xi\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda - 2\,\psi'(\xi\lambda)$$

die Beziehung

$$\psi'(\xi,\lambda) = n\pi(1 + n\pi\lambda\, \mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda)\cos n\pi\xi\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda + (n\pi)^2 \xi \sin n\pi\xi\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda\,. \tag{37}$$

Setzt man nun

$$f(\zeta) = -D\cos n\pi\zeta - E\,n\pi\zeta \sin n\pi\zeta\,,$$

so findet man

$$\varphi'(\lambda,\eta) = -E(n\pi)^2 \cos n\pi\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\eta\,,$$

$$\psi'(\xi,\lambda) = (D-E)\,n\pi \cos n\pi\xi\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda + E(n\pi)^2[\xi \sin n\pi\xi\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda - \lambda \cos n\pi\xi\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\lambda]\,.$$

Durch Vergleich mit den Werten (33) und (34) wird dann

$$\left.\begin{aligned} &E = 1\,, \qquad D - E - E\,n\pi\lambda\, \mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda = 1 + n\pi\lambda\, \mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda\,, \\ &\text{also} \\ &D = 2(1 + n\pi\lambda\, \mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda)\,. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Es kommt mithin schließlich

$$f(\zeta) = -2(1 + n\pi\lambda\, \mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda)\cos n\pi\zeta - n\pi\zeta \sin n\pi\zeta\,. \tag{39}$$

Damit erhalten wir nach (34) in Übereinstimmung mit der Ausgangsformel

$$\left.\begin{aligned} w_2 = -\frac{a^2}{4}\int\int M_2\, d\zeta\, d\bar{\zeta} &= \frac{p\,a^3\,b}{4\,N}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda}\,[n\pi(\zeta-\bar{\zeta})\,(\sin n\pi\zeta - \sin n\pi\bar{\zeta}) \\ &\quad + 2(1 + n\pi\lambda\, \mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda)\,(\cos n\pi\zeta + \cos n\pi\bar{\zeta})] \\ &= \frac{p\,a^3\,b}{N}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}\cos n\pi\xi}{(\pi n)^3\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda}\,[(1 + n\pi\lambda\, \mathfrak{Ctg}\, n\pi\lambda)\, \mathfrak{Cof}\, n\pi\eta - n\pi\eta\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\eta]\,. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Man kann nun die Endformel auch durch die einfachen und doppelten Integrale der $\vartheta_3$-Logarithmen darstellen. Geht man von der Formel aus

$$2\sum_{1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}\,q^n \cos n\pi\zeta}{n(1-q^{2n})} = \ln \vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right) + C_0\,, \tag{41}$$

wo $C_0 = -\sum_{1}^{\infty}{}' \ln(1-q^{2n})$, so erhält man durch Integration zwischen den Grenzen 0 und $\zeta$

$$\Pi_3(\zeta) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}\,q^n \sin n\pi\zeta}{n^2(1-q^{2n})} = \int_0^{\zeta} \ln \vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right) + C_0\zeta \tag{42}$$

und durch eine weitere Integration

$$\left.\begin{aligned} \Theta_3(\zeta) &= \frac{2}{\pi^2}\sum{}' \frac{(-1)^{n+1}\,q^n \cos n\pi\zeta}{n^3(1-q^{2n})} = -\int_0^{\zeta}\int_0^{\zeta} \ln \vartheta_3\left(\frac{\zeta}{2}\right) d\zeta\, d\zeta - \frac{1}{2}\,C_0\zeta^2 + C_1 \\ &\text{weil} \\ C_1 &= 2\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}\,q^n}{n^3(1-q^{2n})} = \sum_{1}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{n+1}}{n^3\, \mathfrak{Sin}\, n\pi\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Beachtet man ferner, daß der von $\lambda$ abhängige Faktor im zweiten Ausdruck von $w_2$ in der Form

$$\frac{1+n\pi\lambda\operatorname{Ctg} n\pi\lambda}{\operatorname{Sin} n\pi\lambda}=\frac{1}{\operatorname{Sin} n\pi\lambda}-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin} n\pi\lambda}\right)=\left(1-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\frac{1}{\operatorname{Sin} n\pi\lambda}$$

$$=\left(1+\pi\lambda q\frac{\partial}{\partial q}\right)\frac{1}{\operatorname{Sin} n\pi\lambda} \tag{44}$$

geschrieben werden kann, so erhält man mit den neu eingeführten Funktionen $\Pi_3$ und $\Theta_3$ folgende Darstellung für die Durchbiegung:

$$w_2=\frac{p\,a^3\,b}{4\pi N}\left|(\zeta-\bar{\zeta})\,[\Pi_3(\zeta)-\Pi_3(\bar{\zeta})]+2\left(1-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)[\Theta_3(\zeta)+\Theta_3(\bar{\zeta})]\right| \tag{45}$$

oder in der Form eines Realteils einer komplexen Funktion

$$w_2=\frac{p\,a^3\,b}{2\pi N}\Re\mathrm{e}\left|(\zeta-\bar{\zeta})\,\Pi_3(\zeta)+2\left(1-\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Theta_3(\zeta)\right|. \tag{46}$$

Die an anderer Stelle durchzuführende Berechnung und Tabulierung der Integralfunktionen $\Pi_3$ und $\Theta_3$, die meines Wissens in den bekannten Handbüchern der elliptischen Funktionen nicht vorkommen, macht bei der guten Konvergenz der zugehörigen Reihen keine große Schwierigkeiten. Entsprechende Funktionen lassen sich in Verbindung mit den anderen $\vartheta$-Funktionen aufstellen.

Die Erweiterung dieser Betrachtung und die Behandlung anderer Belastungsfälle rechteckiger Platten oder Decken nach den vorgetragenen Grundsätzen, insbesondere also die Zurückführung der Durchbiegung auf endliche Ausdrücke mit Hilfe von charakteristischen Funktionen müßte den Gegenstand einer besonderen Untersuchung bilden.

(Eingegangen am 10. Juli 1952.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *W. Müller*, München 9, Taubenstr. 4I.

**Fachwerk und Rahmenwerk.** Ein systematischer Grundriß der Statik des ebenen Tragwerkes. Von Dr.-Ing. **Walter Fries.** Mit 365 Bildern. X, 368 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 42,—

Inhaltsübersicht: Einleitung. Aufgabe und Umfang der Statik. **I. Grundlagen:** Das Tragwerk und seine Teile. Standfestigkeit. Kraftwirkungen. Die Hauptgleichung. Hauptsätze der Mechanik. Krafteck und Seileck. a) Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. b) Statisches Moment und Seileck. Spannungen und Formänderungen des Stabes. a) Der gerade Stab. b) Der krumme Stab. Die Hauptgleichungen der Statik des ebenen Tragwerkes. Die Aufgabe der Statik. Lösungsverfahren. — **II. Das einfach standfeste Tragwerk:** Allgemeines. Allgemeine Berechnung mit der Hauptgleichung. Allgemeine Berechnung mit den Gleichgewichtsbedingungen der Knoten. Die Stützkräfte. Die inneren Kräfte des Tragwerks. Stabvertauschungsverfahren. Der einfache Träger. Einflußlinien. Der einfache Träger unter einem verschiebbaren System von Einzellasten. Das Dreieckfachwerk. Mehrfache und mehrteilige Fachwerke. — **III. Kinematische Untersuchung des einfach standfesten Tragwerkes:** 1. Zwangsläufige Ketten. Die zwangsläufige Kette. Der Polplan. Der Geschwindigkeits- und Verschiebungsplan. 2. Anwendungen. Berechnung der Stabkräfte aus dem Geschwindigkeitsplan. Kinematische Ermittlung der Einflußlinien. Das kinematische Kennzeichen der Standfestigkeit. — **IV. Die Formänderung des Tragwerkes:** 1. Allgemeine Berechnung der Formänderung. 2. Besondere Verfahren. Fachwerkstabzüge. Die Biegungslinie als Momentenlinie (Seileck). Die Formänderung des geraden Stabes. Rahmenstabzüge. — **V. Das mehrfach standfeste Tragwerk. Kraftverfahren:** Das Kraftverfahren. Lastengruppen. Das Festpunktverfahren. a) Unverschiebliche Knotenpunkte. b) Verschiebliche Knotenpunkte. Beispiele. Der eingespannte Stab. Der eingespannte Bogen. — **VI. Das mehrfach standfeste Tragwerk, Formänderungsverfahren:** Die Grundwerte und die Hauptsätze. Die Hauptgleichung. Stockwerkrahmen. Formänderungsgruppen. Näherungsverfahren. a) Unverschiebliche Knotenpunkte. α) Das Momentenausgleichsverfahren. β) Das Drehwinkelausgleichsverfahren. b) Verschiebliche Knotenpunkte. Beispiele. Nachtrag.

**Grundlagen der Wasserwirtschaft und Gewässerkunde.** Von Professor Dr.-Ing. **Otto Streck.** Mit 291 Abbildungen. X, 466 Seiten. 1953. Ganzl. DM 43,50

Inhaltsübersicht: **I. Wesen und Zweck der Wasserwirtschaft:** Das Wasserdargebot aus dem Wasserkreislauf. Die Nutzungen des Wassers. Schadenverhütung bei Wasser. Wesen und Aufgabe der Wasserwirtschaft. Praktische Beispiele für die Wasserbewirtschaftung. Die gewässerkundlichen Aufgabengebiete. — **II. Die atmosphärischen Elemente des Wetters und das Wettergeschehen:** Die atmosphärischen Elemente des Wetters. Das Wetter. — **III. Der Wasserhaushalt und seine Elemente:** Niederschlag. Verdunstung. Versickerung. Abfluß. Beziehung zwischen Niederschlag, Abfluß und Verdunstung. — **IV. Allgemeine Eigenschaften oberirdisch fließender Gewässer:** Talbildung und Flußlaufgestaltung. Laufentwicklung. Bett, Länge- und Querprofil. Vermessung des Flußlaufes und ihre kartographische Verarbeitung. — **V. Wasserstände und Abflußmengen oberirdisch fließender Gewässer:** Wasserstände (Pegelstände). Abflußmengen. — **VI. Weitere wasserwirtschaftliche Verfahren:** Wasserwirtschaftliche Kennwerte. Leistungsplan eines Flußkraftwerks (nicht speicherfähiges Laufwerk). Speicherung und Wasserwirtschaftspläne dafür. — **VII. Hochwasser, Gewässervereisungen, Wasserstandsnachrichtendienst:** Hochwasser. Gewässervereisung. Wasserstandsnachrichtendienst. — **VIII. Die Schwerstoffe in den offenen Gewässern:** Herkunft der Schwerstoffe. Der Schweb (Sinkstoff, Schwemmstoff). Das Geschiebe. — **IX. Grundwasser:** Entstehung und Vorkommen des Grundwassers. Aufsuchen von Grundwasser, Messung und Berechnung. — **X. Das Meer im Küstengebiet:** Beschaffenheit des Meerwassers. Winde und Wellen. Die Gezeiten (Tiden). Meeresströmungen. — **XI. Qualitative und biologische Gewässerkunde (Wassergütewirtschaft):** Wesen und Aufgabe. Qualitative Eigenschaften des Wassers. Biologischer Bereich der Gewässer. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

**Die Hartzerkleinerung.** Maschinen, Theorie und Anwendung in den verschiedenen Zweigen der Verfahrenstechnik. Von **Carl Mittag,** Köln. Unter Mitarbeit von Dr.-Ing. Hellmuth Weinrich, Köln. Mit 190 Abbildungen. VI, 342 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 40,50

Inhaltsübersicht: **I. Die Hartzerkleinerung und ihre wichtigsten Maschinen:** Einleitung. — Geschichtlicher Überblick. — Die wichtigsten Maschinen der Hartzerkleinerung. — Stahlguß und Verschleißwerkstoffe für Zerkleinerungsmaschinen. — **II. Theoretische Grundzüge der physikalischen und technischen Zerkleinerung und ihre Bedeutung für die Praxis:** Einleitung. — Allgemeine Theorie der Hartzerkleinerung. — Theorie einzelner Maschinen. — Ausblicke für die Weiterentwicklung der maschinellen Hartzerkleinerung und neue Entwicklungswege. — **III. Die Hartzerkleinerung in der Aufbereitungs- und Verfahrenstechnik:** Einleitung. — Hilfsmaschinen. — Die Hartzerkleinerung in Anlagen der Aufbereitungs- und Verfahrenstechnik. — **Schrifttum. — Sachverzeichnis.**

---

**SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**

**Die Metallurgie der Ferrolegierungen.** Bearbeitet von Ingenieur F. V. Andreae, Dr.-Ing. W. Dautzenberg, Dipl.-Ing. A. Driller, Professor Dr. R. Durrer, Dr. G. Fiore, Dr. W. Freigang, Dipl.-Ing. W. Hilgers, Dipl.-Ing. K. Kintzinger, Walther Mareth, Dr.-Ing. O. Rösner, Professor Dr. E. Schwarz v. Bergkampf, P. Sernitz, Dr. O. Smetana, Dr. phil. G. Volkert, Dipl.-Ing. W. Wilke, Dr.-Ing. J. Wotschke. Herausgegeben von Professor Dr. **R. Durrer**, Zürich und Dr. phil. **G. Volkert**, Söllingen/Karlsruhe. Mit 188 Abbildungen. VII, 409 Seiten 1953. Ganzleinen DM 72,—

Inhaltsübersicht: **I. Allgemeine Metallurgie der Ferrolegierungen: A. Begriffsbestimmung und Wirkungsweise der Ferrolegierungen.** Von Prof. Dr. E. Schwarz v. Bergkampf. — **B. Geschichtliche Entwicklung.** Von Dr. phil. G. Volkert. — **C. Die Ausgangsstoffe.** Von Dr. phil. G. Volkert. — **D. Physikalisch-chemische Grundlagen der Herstellungsverfahren für Ferrolegierungen.** Von Prof. Dr. E. Schwarz v. Bergkampf. — **E. Die metallurgischen Arbeitsweisen:** Das Verhütten im Hochofen. Von Prof. Dr. R. Durrer. Das elektrothermische Verhütten mit Kohle als Red.-Mittel. Von Dr. phil. G. Volkert. Das elektrosilicothermische Verhütten. Von Dr. phil. G. Volkert. Das metallothermische Verhütten ohne Zufuhr elektr. Energie. Von Dr.-Ing. W. Dautzenberg. **II. Die Öfen: A. Modellbetrachtung des Lichtbogenofens.** Von Prof. Dr. E. Schwarz v. Bergkampf. — **B. Die elektrische Seite der Ferrolegierungsöfen.** Von Dipl.-Ing. A. Driller. — **C. Mechanischer Aufbau der Anlagen.** Von Dipl.-Ing. W. Wilke. — **III. Elektroden:** Amorphe Elektroden. Von W. Mareth. Graphitierte Elektroden. Von W. Mareth. Söderbergelektroden. Von Dr. W. Freigang. — **IV. Spezielle Metallurgie der Ferrolegierungen: A. Ferrochrom:** Erschmelzung tiefprozentiger Chromlegierung im Hochofen. Von Dipl.-Ing. K. Kintzinger. Erschmelzung von Ferrochrom im Elektroofen. Von Dr. phil. G. Volkert. Aluminothermische Erschmelzung von Chromlegierungen. Von Dr.-Ing. W. Dautzenberg. — **B. Ferro-Kobalt.** Von Dipl.-Ing. W. Hilgers. — **C. Ferromangan und Manganlegierungen:** Erschmelzung von Ferromangancarburé im Hochofen. Von Dipl.-Ing. K. Kintzinger. Erschmelzung von Ferromangan-carburé im Elektroofen. Von Dr. phil. G. Volkert. Silikothermische Erschmelzung von Manganlegierung im Elektroofen. Von Dr. phil. G. Volkert. Aluminothermische Erschmelzung von Manganlegierungen. Von Dr.-Ing. W. Dautzenberg. — **D. Ferromolybdän:** Erschmelzung von Ferromolybdän im Elektroofen. Von Dr. phil. G. Volkert. Silikothermische Erschmelzung von Ferromolybdän. Von Dr. phil. G. Volkert. — **E. Ferronickel.** Von Dr. G. Fiore. — **F. Ferrophosphor.** Von Dr.-Ing. J. Wotschke. — **G. Ferrosilizium:** Erschmelzung tiefprozentiger Ferrosilizium-Legierungen im Hochofen. Von Dipl.-Ing. K. Kintzinger. Erschmelzung von Ferrosilizium-Legierungen im Elektroofen. Von Dr. phil. G. Volkert. Calcium-Silizium. Von Dr. phil. G. Volkert. — **H. Ferrotantal und Ferroniob.** Von Dr.-Ing. O. Rösner. — **I. Ferrotitan:** Erschmelzung der Titanlegierungen im Elektroofen. Von Dr. phil. G. Volkert. Aluminothermische Erschmelzung von Titanlegierungen. Von Dr.-Ing. W. Dautzenberg. — **K. Ferrovanadium.** Von Dr. O. Smetana. — **L. Ferrowolfram.** Von Dr. phil. G. Volkert. — **M. Ferrozirkon-Silizium.** Von Dr. phil. G. Volkert. — **V. Ausblick.** Von Prof. Dr. R. Durrer. — **Sachverzeichnis.**

**Kurzes Handbuch der Brennstoff- und Feuerungstechnik.** Von Dr.-Ing. **Wilhelm Gumz,** VDI. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 168 Abbildungen. IX, 583 Seiten. 1953. Ganzleinen DM 45,—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — **I. Physikalische Grundgesetze:** Kennzeichnung von Festkörpern, Schüttungen und Stäuben. Mechanik gasförmiger Körper. Wärmetheorie. Die Wärmeübertragung. — **II. Die Brennstoffe:** Zusammensetzung und Eigenschaften der festen Brennstoffe. Die Veredlung fester Brennstoffe auf mechanischem, thermischem und chemischem Wege. Zusammensetzung und Eigenschaften der flüssigen Brennstoffe. Gewinnung und Veredlung der flüssigen Brenn- und Treibstoffe. Zusammensetzung und Eigenschaften gasförmiger Brennstoffe. Die Veredlung gasförmiger Brennstoffe. — **III. Verbrennung:** Verbrennungsrechnung für feste und flüssige Brennstoffe. Taupunkt und Schwefelsäurebildung im Rauchgas. Sonderfälle der Verbrennung. Ermittlung der Luft- und Rauchgasmengen aus dem Heizwert und der Luftüberschußzahl oder dem $CO_2$-Gehalt. Die Verbrennungstemperatur. Das It-Diagramm. Die Wärmeverluste. — **IV. Vergasung:** Vergasungsrechnung für feste Brennstoffe. Schachtofenberechnung. — **V. Verbrennungs- und Vergasungsvorgänge:** Statik und Dynamik der Verbrennung und Vergasung. Der physikalische Vorgang der Verbrennung. Der Zündvorgang. Der Verbrennungsvorgang in der Feuerung. Der Vergasungsvorgang im Gaserzeuger. — Anhang. — **Namen- und Sachverzeichnis.**

**Vergasung fester Brennstoffe. Stoffbilanz und Gleichgewicht.** Eine Darstellung praktischer Berechnungsverfahren. Von Dr.-Ing. **Wilhelm Gumz,** Columbus, Ohio. Mit 4 Abbildungen. VII, 102 Seiten. 1952. Steif geheftet DM 9,60

Inhaltsübersicht: I. Einleitung. — II. Grundsätzliches zur Berechnung von Vergasungsvorgängen. — III. Bemerkungen zur Kinetik der Vergasungsvorgänge. — IV. Das Gleichungssystem und seine Lösungen. — V. Verhalten des Schwefels im Gaserzeuger. — VI. Zahlenbeispiele. — Formel- und Tabellenanhang. — Namen- und Sachverzeichnis.

**SPRINGER-VERLAG/BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG**

*Diesem Heft liegen je 2 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg und des Springer-Verlages, Wien, bei.*

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany, 57275 4022 0.8 K. B./Z. 040 W